Dr. GHEORGHE ENESCU

Logica simbolică

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ • BUCUREŞTI 1971

PREFAŢA

astă lucrare urmează cărţilor noastre *Introducere în matematică* (1965) şi *Logică şi adevăr* (1967). Prima era ată iniţierii cititorului în logica simbolică (în special culul propoziţiilor şi calculul predicatelor), a doua era unere originală a principalelor probleme metateoretice ;icii moderne. Rapiditatea cu care ele s-au epuizat din i dovedeşte în ce măsură publicul nostru este interesat menea probleme. De atunci a crescut numărul celor aţi (printre ei un mare număr de studenţi) şi se resimte unei noi lucrări în acest domeniu. Cartea de faţă vine •undă acestei cerinţe. În ce raport se află ea cu alte anterioare publicate de noi (inclusiv cele două cărţi)? *'roducerea în logica matematică* noi am reintegrat *aproape* a informaţie referitoare la logica propoziţiilor, logica telor şi logica relaţiilor (se înţelege, cu excepţia anumi-;aje pe care le-am reprodus aproape fără schimbări, ı fost revizuit). Nu au fost reintegrate capitolul intro-capitolul de istoria logicii matematice şi cel de logică i. Din aceste capitole am extras numai unele informaţii. asaje (puţine la număr) au fost reproduse din lucrarea *i adevăr*. O serie de studii şi articole cu caracter didactic e de noi în revistele „Analele Universităţii" „Revista ofie" şi „Gazeta matematică" au fost integrate în ıei reprelucrări adecvate.

:mnată cantitate de informaţie nu a mai fost expusa lucrări anterioare. Ca arie tematică, lucrarea cuprinde toate capitolele de importanţă din logica modernă.

Prin aceasta cititorul român va avea în limba sa ideile de bază ale logicii moderne, ceea ce își propune lucrarea de față. Expunerea nu cere din partea cititorului cunoștințe speciale. Lucrările utilizate în special au fost:

1. D. Hilbert, W. Ackermann, *Bazele logicii teoretice* (lucrare clasică sub aspect pedagogic);
2. S. C. Kleene, *Introducere în metamatematică* (lucrare cu caracter enciclopedic, dar imposibilă pentru cei ce vor să se inițieze);
3. A. Church, *Introducerea în logica matematică* (carte specioasă, dar extrem de utilă pentru precizarea anumitor concepte);
4. C. I. Lewis, Langford, *Logica simbolică;*
5. Jan Lukasiewicz, *Silogistica aristotelică din punctul de vedere al logicii formale moderne;*
6. A. A. Zinoviev, *Logica polivalentă* (ediția germană);
7. Gr. C. Moisil, *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*: precum și *Încercări vechi și noi de logică neclasică.*

Contribuțiile de o deosebită valoare teoretică ale prof. Gr. C. Moisil relativ la logica modală generală (precum și altele) trebuie să intre în formația oricui studiază bazele logicii simbolice (matematice). Așa se explică atenția pe care le-am acordat-o în capitolul despre logica modală.

Foarte multe probleme sînt expuse în detaliu în așa fel încît o lectură atentă a lucrării să asigure deja un grad de specializare pentru cititor. Cartea este destinată tuturor celor care urmăresc o informație de bază (dar destul de cuprinzătoare) în domeniul logicii moderne. Nădăjduim că ea va corespunde totodată actualului nivel de cerințe ale unui public care totuși în ultimii ani a mai avut posibilitatea să ia cunoștință de unele probleme ale logicii moderne.

Conf. dr. GHEORGHE ENESC[U]
Membru corespondent al Academ[iei]
de Științe Sociale și Polit[ice]

I

INTRODUCERE

1. DEFINIȚIE. OBIECT. CONȚINUT

Deși o definiție a științei este puțin înțeleasă și puțin utilă înainte de a parcurge știința respectivă, tradiția ne-a lăsat obiceiul de a precede expunerea științei de o scurtă prezentare a ceea ce urmărește cercetarea în domeniul științei respective. Dintre toate definițiile următoarea este mai adecvată stadiului actual de dezvoltare a logicii. ***Logica (formală) este știința care studiază formele propoziționale și legile de raționare cu expresii propoziționale de diferite forme.*** Aflarea legilor de raționare este obiectivul final al logicii. Dar pentru a atinge acest obiectiv logicianul trebuie să cerceteze metodele care-l duc la descoperirea de legi (logice). În acest sens logica a parcurs două faze: a) faza logicii intuitive; b) faza logicii „matematizate".

Logica tradițională utiliza în principal limbajul natural, metode descriptive și inductive. Ea este o logică în primul rînd a limbajului natural și a științelor nematematizate. Ea își formulează propozițiile pentru a deservi cu precădere gîndirea comună și științele nematematizate (sau puțin matematizate).

În faza logicii „matematizate" accentul se pune pe metodele de tip matematic (limbajul formulelor, calculul, demonstrația axiomatizată, modelarea abstractă). Logica își formulează propozițiile conform cu necesitățile științelor matematice sau matematizate. Limbajul ei este în primul rînd limbajul simbolic. Conform cu această situație logica modernă poartă

numele de logică simbolică sau „matematică" sau „algebrică", sau „teoretică".

Deşi logica simbolică constituie forma cea mai înaltă de dezvoltare a logicii, vechea logică, intuitivă, denumită acum şi „logică generală" continuă să existe tocmai datorită destinaţiei ei de care am vorbit mai sus (deservirea gîndirii în limbajul natural). Ea se restrînge în special la problemele utile sferelor de gîndire de care am vorbit şi este limitată ca perspectivă la posibilităţile pe care le oferă metodele (destul de rudimentare) de care se slujeşte.

De remarcat este că nici logica simbolică nu se lipseşte de limbajul natural, dar acea porţiune de care se foloseşte este puternic „raţionalizată", standardizată (ca şi în matematică).

Problema fundamentală a logicii este de a decide care anume propoziţii pe care le formulează ştiinţa logicii reprezintă *legi logice*. Soluţionarea acestei probleme depinde de metodele de rezolvare de care dispunem. Toate legile logicii pot fi formulate atît în limbajul natural cît şi cel simbolic, dar aplicarea anumitor metode exacte este condiţionată strict de folosirea limbajului simbolic. Metodele logicii moderne asigură „producţia în serie" de legi logice tocmai de aceea accentul cade în cercetările de logică pe descoperirea şi perfecţionarea metodelor de rezolvare. Principalul conţinut al tratatelor de logică modernă constă din expunerea acestor metode. De aci decurge că în definiţia dată mai sus logicii noi am considerat doar obiectivul ei final nu şi preocupările pentru atingerea acestui obiectiv, noi am definit logica în înţelesul de sistem de teorii despre anumite relaţii obiective în raport cu aceste teorii. Dacă însă luăm în considerare preocupările pentru metode (ceea ce reprezintă esenţialul în atingerea obiectivului final), atunci definiţia trebuie reformulată astfel: *Logica (formală) este ştiinţa care studiază formele proporţionale şi legile de raţionare cu expresii propoziţionale de diferite forme, precum şi ansamblul metodelor care-i permit atingerea acestui obiectiv.* De remarcat este faptul că dacă în prima fază de dezvoltare accentul se punea pe formularea izolată a legilor logice, în a doua fază s-a trecut la „integrarea" acestor legi în sisteme (teorii), iar acum preocuparea se ridică la un alt nivel — studierea unor asemenea mulţimi de sisteme (degajarea unor „structuri" de cel mai înalt ordin de abstracţie). De aci, pe lîngă împărţirea clasică în teorii cu o sferă de acţiune limitată

la un grup sau altul de legi logice, logica contemporană este structurată acum şi în teorii de diferite ordine (teorii, metateorii, metametateorii etc.).

Conţinutul logicii poate fi prezentat succint prin indicarea principalelor teorii logice. „Logica propoziţiilor (sau „teoria funcţiilor de adevăr"), logica predicatelor, logica claselor, logica relaţiilor, silogistica, teorii logice speciale în cadrul celor de mai sus (logici polivalente, logici modale, logici deontice, teoria inducţiei, teoria sistemelor logice (metalogica). Fiecărei teorii îi corespund diferite procedee de calcul şi sisteme axiomatice, de aci se mai spune „calculul propoziţiilor", „calculul predicatelor" etc.

2. SCURT ISTORIC

Logica a apărut ca ştiinţă de sine stătătoare în antichitate creatorul ei fiind Aristotel (384—322). Opera în care Aristotel a expus logica este cunoscută sub numele de „Organon". Înainte de Aristotel sofiştii, Socrate şi Platon au dezvoltat unele probleme de logică. Astfel, sofiştii au descoperit diferite tipuri de sofisme, Socrate şi Platon au iniţiat analiza noţiunilor, definiţia, clasificarea, inducţia, precum şi unele forme simple de raţionament deductiv. Faţă de opera lui Aristotel pe care au pregătit-o, contribuţiile înaintaşilor acestuia, deşi însemnate, sînt totuşi minore (cel puţin după impresia pe care ne-o lasă textele păstrate). Aristotel a creat prima teorie logică (silogistica) şi a pus multe alte probleme care au fost reluate ulterior. El a utilizat şi a dat o teorie a metodei deductive.

După Aristotel logica a fost dezvoltată în direcţia indicată de el de către peripatetici (Teofrast, Alexandru din Afrodisias) şi pe o cale, întrucîtva diferită, de şcolile megarică şi stoică. Megaricii şi stoicii au pus începuturile aşa-zisei logici a propoziţiilor (au formulat raţionamente bazate pe propoziţii de implicaţie, conjuncţie, disjuncţie şi alte tipuri de propoziţii compuse considerate sub raportul adevărului şi falsului). Dintre megarici Diodoros Cronos (sec. IV î.e.n.) şi Filon din Megara (sec. IV—III î.e.n.) au fost cei care au acordat o atenţie studierii implicaţiei (i-au formulat diferite proprietăţi în direcţia aşa-numitei „implicaţii materiale"), iar dintre stoici

Zenon din Cition (336—264) şi Chrysippos (232—205?) au încercat să construiască o teorie generală a implicaţiei.

În trecerea spre evul mediu Boetius (480—524) neoplatonic din Roma, deşi în materie de logică este mai mult un traducător şi comentator al lui Aristotel, pare a avea totuşi unele idei originale.

Evul mediu a avut destul de mulţi logicieni, unii dintre ei foarte subtili, astfel ca Duns Scott, Wiliam Occam, Iohanes Buridan, Petrus Hispanus, Albert Saxonul, Raimundus Lullus. Ei au formulat multe din actualele legi ale logicii propoziţiilor, au studiat paradoxele şi probleme de terminologie. R. Lullus a formulat ideea unor „maşini logice".

Prin încercarea de a forma o ştiinţă matematică generală (mathesis universalis) Descartes a stimulat cercetările logice din direcţia simbolismului matematic. Aceste intenţii carteziene au luat formă concretă la Leibniz care a şi formulat în mod „matematic" o serie de legi logice şi a schiţat posibilitatea unei axiomatici logice formalizate.

Pe la jumătatea secolului trecut doi logicieni britanici, irlandezul George Boole (1815—1864) şi englezul Augustus de Morgan (1806—1878) au găsit calea de a aplica în logica formală aşa-zisele „metode matematice" (calculul), o descoperire ce avea să aibă consecinţe revoluţionare asupra dezvoltării acestei ştiinţe. Ei au dus astfel la bun sfîrşit visul lui Leibniz (de cercetările căruia în această direcţie probabil n-au avut habar), de a construi logica după modelul matematicii. Limbajul formulelor şi calculul care dăduseră atîtea rezultate în matematică vin acum să-şi demonstreze eficienţa şi în logică. La rîndul său metoda axiomatică dobîndeşte pe această cale noi posibilităţi de utilizare în această străveche ştiinţă. Dacă pînă la Boole şi Morgan cercetările de logică aveau un caracter inductiv ţintind să surprindă în experienţa de gîndire scheme de raţionament, acum noile metode schimbă orientarea — ele asigură o „producţie de masă" — în loc de a căuta să formuleze legi izolate se trece la producţia de întregi sisteme de legi. Două direcţii: *descoperirea de noi sisteme logice*, *perfecţionarea formală a sistemelor descoperite*. În acest sens, alături de teoremele logice propriu-zise (adică acelea care exprimă legi logice) îşi fac loc teoreme şi reguli referitoare la sistemul logic (pe scurt „metapropoziţiile"). Principii vechi iau în calculul logic al lui Boole forme de nerecunoscut, cum

este cazul principiului necontradicției (numit de Boole „principiul dualității"):

$$x(1 - x) = 0$$

Calculul se face după reguli bine cunoscute din algebră și Boole este nu numai întemeietorul logicii simbolice (matematice) ci și inițiatorul unei etape de dezvoltare denumită etapa „algebrei logice" (sau chiar a „algebrei Boole"). Operațiile logice se fac asemănător cu cele din algebră. De exemplu, în cazul formulei de mai sus ea poate fi derivată din $x^2 = x$ prin operațiile:

$$x^2 = x$$

$$x = x^2$$

$$x - x^2 = 0$$

$$x(1 - x) = 0$$

Deși constantele 1 și 0 nu desemnează aci numerele respective ci universul („totul") și respectiv clasa vidă („nimicul") se poate vedea că formulele de mai sus sînt adevărate și pentru aritmetica binară (0,1), căci $0^2 = 0$ și $1^2 = 1$.

În acest fel Boole descoperă structuri comune logicii și matematicii, adică unele formule logice sînt izomorfe cu formule matematice. La rîndul său, de Morgan dezvoltînd teoria relațiilor construiește pe baza ei o teorie generalizată a silogisticii exprimată în formă simbolică (formă destul de greoaie, ce-i drept). Odată ce s-a demonstrat posibilitatea utilizării metodei algebrice (de calcul) în logică preocupările vor fi acum îndreptate în sensul perfecționării acestei metode. R. L. Ellis, W. S. Jevons, J. D. Gergonne, R. Grossmann, J. Venn, Hugh Mc Coll, E. Schröder și P. S. Porețki sînt cîteva din numele care s-au impus în această perioadă. J. Venn dezvoltă metoda geometrică a cercurilor în conformitate cu noul stadiu de dezvoltare a logicii. El este printre primii care utilizează expresia „Logica simbolică" (Symbolic Logic) ca titlu de tratat. E. Schröder (1841—1902) dezvoltă metoda algebrică și în legătură cu viitorul calcul al predicatelor. Hugh Mc Coll

(1837—1909) reformulează logica propoziţiilor într-un mod destul de apropiat de actuala formă. Jevons a introdus disjuncţia neexclusivă (notată de el cu +), iar I. D. Gergonne relaţia de incluziune ⊂ (conţine) şi ⊃ (e conţinut). Problema pe care şi-o pune Poreţki este rezolvarea unor ecuaţii (egalităţi) logice date. A rezolva o egalitate logică înseamnă „a deduce din ea toate sau cîteva din concluziile ei logice". Rezolvarea egalităţii este totală sau parţială în funcţie de faptul dacă toate sau numai unele concluzii au fost găsite. Rezolvarea deplină a unei egalităţi logice este dată atunci cînd am găsit sistemul concluziilor echivalent cu egalitatea. Operele lui Hugh Mc Coll şi ale lui E. Schröder fac trecere spre noua etapă de dezvoltare a logicii — etapa fundamentării logice a matematicii. Gînditorii cei mai de seamă ai acestei etape sînt M. S. Peirce (1835—1882), Gottlob Frege (1848—1925), G. Peano 1858—1932) şi B. Russell (1872—1970).

Logica îşi găseşte un stimulent în necesitatea de a sistematiza matematica şi de a o fundamenta. Apariţia teoriei mulţimilor a lui Georg Cantor va facilita apropierea dintre logică şi matematică.

Frege axiomatizează calculul propoziţiilor, perfecţionează calculul predicatelor (incluzînd în el şi silogistica) şi construieşte un sistem logico-aritmetic prin care încearcă să deducă aritmetica din logică. Peano perfecţionează simbolismul logic dîndu-i totodată o largă utilizare în expunerile matematice. Apariţia antinomiilor în sistemele lui Frege şi Cantor constituie sursa din care vor apărea ulterior cercetările metamatematice şi metalogice.

Această etapă atinge punctul culminant în opera lui Whitehead şi Russell *Principia Mathematica*, primul tratat de logică matematică în înţelesul actual al cuvîntului. Aci sînt formulate distinct logica propoziţiilor, logica predicatelor, logica claselor, logica relaţiilor şi aritmetica „logicizată", adică toate teoriile de bază ale logicii moderne. Bertrand Russell (1872—1970) formulează şi cea mai răspîndită metodă de soluţionare a antinomiilor, aşa-numita „teorie a tipurilor".

Următoarea fază poate fi numită a teoriilor logice neclasice sau, cum am numit-o ţinînd seama de numeroasele sisteme care apar, a „ramificării logicii". În această perioadă J. Lukasiewicz (1878—1956) şi L. E. Post (1897—1945) construiesc

primele sisteme de logică polivalentă, iar C. I. Lewis (1883—1964) dă un sistem de logică modală. Tot Lukasiewicz reface silogistica cu ajutorul metodelor logico-matematice şi inventează un simbolism logic special. David Hilbert (1862—1943) (împreună cu W. Ackermann) dă o formă clasică logicii matematice şi iniţiază cercetările de metamatematică (teoria demonstraţiei matematice şi în primul rînd a proprietăţilor sistemului axiomatic). Cercetările de metamatematică şi apoi de metalogică sînt mult stimulate de descoperirile lui K. Gödel (celebra teoremă de incompletitudine), A. Tarski (teoria adevărului în limbajele formalizate), R. Carnap (sistematizarea semanticii logice). Brouwer, Heyting, A. Kolmogorov, A. A. Markov, ş.a. dezvoltă logica în direcţia concepţiei constructiviste asupra matematicii. Logica normativă este dezvoltată de către G. H. von Wright ş.a. O descoperire importantă este aplicarea formalismului logic la schemele cu relee şi contacte (Cl. Shannon şi V. I. Şestakov). Aceasta a pus începutul dezvoltării „logicii tehnice" şi deci a unor posibilităţi de a lega logica cu practica în modul cel mai eficient. Istoria logicii a luat şi ea un nou avînt şi multe dintre ideile logicienilor antici şi medievali au stimulat gîndirea logico-matematică. A fost redescoperită „logica stoică", şi opera logică a lui Leibniz a fost pusă într-o altă lumină, iar multe idei ale scolasticilor au fost reintegrate în logică. Filozofia logicii a dobîndit şi ea noi perspective.

În tara noastră Gr. C. Moisil iniţiază (1935) cercetările de logică matematică din direcţia algebrei abstracte, iar după al doilea război mondial pune şi bazele cercetărilor logice în direcţia aplicaţiilor tehnice. Eugen Mihăilescu obţine unele rezultate în tehnica algoritmică a logicii. M. Tîrnoveanu realizează o sinteză a logicii matematice de pe poziţiile celor mai noi cuceriri în domeniul matematicii abstracte, iar Petre Botezatu propune un interesant model al logicii naturale. S. Vieru abordează modern silogistica. Anton Dumitriu studiază paradoxele logico-matematice.

În lucrările noastră am formulat unele metateoreme referitoare la utilizarea limbajului aritmetic în logică şi la sistemul de echivalenţă, am construit un formalism silogistic (în genul calculului natural), am dat o formă originală metodei relaţiei de denumire şi am cercetat diferite probleme de metalogică referitoare la paradoxele logice, teorema lui Gödel ş.a.

Bibliografie (pentru istoric)

1. I. M. Bochenski, *Formale Logik*, Verlag Albert Freiburg/München.
2. W. Kneale and M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford Clarendon Press, 1962.
3. Gh. Enescu, *Istoria logicii matematice*, în vol. „Introducere în logica matematică" (cap. IV), București, 1965.

3. TERMENI ȘI EXPRESII PROPOZIȚIONALE

Gîndirea și cunoașterea se realizează cu ajutorul limbajului. Limbajul constă din expresii. Logica se interesează în mod deosebit de trei feluri de expresii: 1) expresii pentru obiecte și proprietăți, 2) expresii propoziționale, 3) expresii-operatori (care împreună cu cele din clasa 1) și din clasa 2) duc la formarea de expresii propoziționale). Astfel „om", „autorul poemului *Luceafărul*", „alb", „roșu", sînt expresii de prima categorie, „$2 + 2 = 4$", „toate mamiferele sînt animale", „$x + 2 = 5$" sînt expresii de a doua categorie, iar „unii", „toți", „pentru orice", „nu", „și", „dar" sînt expresii de a treia categorie.

Termenii sînt expresii care desemnează obiecte (resp. mulțimi de obiecte) sau proprietăți. Uneori nu se distinge din expresie dacă o raportăm la obiecte sau la proprietăți (însușiri, relații), alteori acest lucru se indică explicit. De exemplu, în expresia „mamiferele sînt animale" distincția între referirea la mulțimea de obiecte și referirea la proprietăți (determinări ale obiectelor), nu este dată, dar în „toți oamenii aparțin mulțimii vertebratelor" și „toți oamenii au proprietatea de a fi vertebrate" distincția este precis formulată.

Expresiile propoziționale sînt acele expresii care afirmă sau neagă ceva despre o entitate.

Logica se interesează în primul rînd de expresiile propoziționale care au următoarele determinări a) o formă gramaticală precisă, b) o informație (ceea ce intenționează să comunice despre obiect), c) o valoare logică (adevărul, falsul), d) o „structură logică", e) o valoare de întrebuințare (teoretică sau practică). Se înțelege că ea nu se interesează de expresii a modul concret ci la un mod foarte abstract.

În vederea studierii expresiilor este nevoie să analizăm întrucîtva termenii, să-i clasificăm.

Clasificarea termenilor. Termenii pot fi clasificați după diferite criterii. Dăm mai jos cele mai importante clase de termeni (obținute după diferite criterii).

a) Termeni *obiectuali* („om", „plantă"), *predicativi* („uman", „alb"), *de relație* („egalitate", „indentitate") (clasificare după felul entității desemnate).

b) Termeni *abstracți* („albeață", „umanitate") și *concreți* („om") (clasificare după cum se referă la obiect ca întreg sau la o determinare a obiectului).

c) Termeni *reali* („plantă"), *ideali* („punctul", „gazul ideal") și *vizi* („îngeri", „demon") (după gradul de corespondență cu obiectul).

d) Termeni *pozitivi* („formal") și *negativi* („neformal").

e) Termeni *singulari* („Eminescu", „Biblioteca Academiei R.S.R."), *generali* („copac") și *categoriali* („materie", „spațiu", „timp", „formă") (clasificare după cantitate).

f) Termeni *absoluți* („număr", „figură") și *relativi* („bun", „rău").

g) Termeni *constanți* („2", „cinci", „om") și *variabili* (x, y, z, în algebră).

h) Termeni *simpli* („Ionescu", „pom") și *compuși* („eroul de la Austerlitz"). Se observă că prima clasificare (a) este înrudită cu a doua (b). Termenii reali au o semnificație, termenii ideali pornesc de la o semnificație dar prin anumite operații de abstractizare la limită (= idealizare) ei își pierd semnificația directă, fără ca totuși să fie contradictorii, termenilor vizi nu le corespunde nimic. Termenii generali *determină o mulțime de obiecte în univers* în timp ce termenii categoriali nu. Termenii absoluți au semnificație de sine stătătoare în timp ce termenii relativi nu. De exemplu, „Popescu este bun" nu este o expresie precisă deoarece trebuie să se arate în ce relație Popescu este bun.

În ce privește, termenii compuși ei sînt de două feluri: expresii *descriptive* (ex. „autorul romanului *Ion*") și expresii de *abstracție* („oamenii care au construit rafinăriile de la Ploiești"). Ambele tipuri de expresii joacă în logică un rol important.

Clasificarea expresiilor propoziționale

a) Trei grupe de criterii ne interesează aci în primul rînd: clasificarea bazată pe clasificarea termenilor, clasificarea după

conţinut şi după formă. De exemplu, pentru prima categorie avem propoziţii cu termeni pozitivi sau negativi, reali, ideali sau vizi etc.

b) Clasificarea după conţinut. Aci avem punctul de vedere al informaţiei, resp. domeniul de informaţie (propoziţii matematice, fizice, etice, filozofice etc.) şi nivelul de abstracţie (propoziţii teoretice, empirice). Tot după conţinut este şi criteriul de valoare — adevărate, false etc.

Criteriile după conţinut se mai numesc şi „semantice".

c) Clasificarea după formă („criterii sintactice").

În vederea stabilirii unui sistem de clasificare vom proceda mai întîi regresiv (adică prin diviziune) apoi progresiv (prin generalizare). Uneori vom denumi criteriul alteori nu (cînd nu există încă o denumire stabilită).

C_1) Expresii propoziţionale *constante* („Eminescu este autorul poemului *Luceafărul*", „$7 + 5 = 12$") şi *variabile* („$x + 2 = 5$"; „În Bucureşti plouă", aci nu e stabilit timpul). Primele se mai numesc pur şi simplu *propoziţii* sau propoziţii închise, celelalte se numesc *funcţii propoziţionale* sau propoziţii deschise.

Ne limităm apoi la clasa propoziţiilor (închise).

C_{11}) Propoziţii *afirmative* („Napoleon a fost împăratul Franţei", „$2 + 2 = 4$", „Toate numerele naturale sînt numere întregi", „dacă plouă atunci îmi iau umbrela" şi *negative* („Nu toţi oamenii sînt paşnici", „Nu este adevărat că $2 + 2 = 4$". Aici a nu confunda *negativ* cu *fals*. (Criteriul calităţii).

C_{12}) Propoziţii *elementare* („$7 + 5 = 12$", „Toţi oamenii sînt raţionali", şi *neelementare* („Nu toate numerele întregi sînt naturale", „Este posibil ca pe planeta Marte să fie viaţă", „$2 = 3$ sau $2 > 3$ sau $2 < 3$").

C_{13}) Propoziţii *valorice* („Este adevărat $2 = 2$", „Este fals $2 = 3$") şi *nevalorice* ($2 = 2$, $2 < 3$).

Ne limităm la clasa celor elementare.

C_{121}) Criteriul structurii interne: *aristotelice*, de forma „S este P" („Omul este animal raţional", „Toate triunghiurile echilaterale au unghiurile egale", „Toţi brazii sînt conifere"), *intensionale* de forma „obiectul x are proprietatea F" („Numărul 2 are proprietatea par", „orice număr par are proprietatea de a se împărţi exact la o putere a lui 2"), *extensionale*, de forma „obiectul x aparţine clasei K" („3 aparţine clasei nume-

relor naturale"), de *relație* cu forma (de bază), „x se află în relația R cu y" („2 > 1", „Bucureștiul este la est de Olt").

C_{122}) Criteriul cantității: *singulare* („Liviu Rebreanu este autorul romanului *Ion*"), *particulare* sau de existență („Unii oameni sînt octogenari", „există x astfel că $x + 2 = 5$") și *universale* („Toate numerele raționale sînt reale"). Cele universale mai pot avea forma în care nu apare cuvîntul „toți" (sau sinonime cu el), ca „Triunghiul are 180°", „Triunghiurile sînt figuri geometrice".

C_{123}) Propoziții *definitorii* („omul este animal rațional") și *nedefinitorii* („omul este animal").

Trecem la clasa celor neelementare.

C_{124}) Propoziții neelementare cu *o componentă* („*Nu* orice muscă face miere", „Este adevărat că $2 + 2 = 4$", „Este posibil ca în 1975 să fie o vară călduroasă"), cu *mai multe* componente („dacă $2 = 2^1$ și $2^1 = 1 + 1$ atunci $2 = 1 + 1$").

La rîndul lor propozițiile cu o componentă („monare") pot fi împărțite după cum urmează:

C_{1241}) Criteriul modalității: *asertorice* sau nemodale („Nu toți oamenii sînt albi"), *de posibilitate* numite și problematice, au forma „Este posibil p" („Este posibil ca în 1975 să fie un an ploios"), *de necesitate* numite și *apodictice* au forma „Este necesar p" („Este necesar ca $2 = 2$"), *de contingență*, au forma „Este contingent p" („Este contingent (= se întîmplă) ca monumentele vechi să dispară"), *de imposibilitate*, au forma „Este imposibil p" („Este imposibil $2 \neq 2$").

C_{125}) Criteriul operatorilor propoziționali: *negative*, *conjunctive*, *disjunctive*, *implicative* etc. (Acestea vor fi studiate pe larg în capitolul următor).

Cu aceasta am încheiat mersul regresiv. Se observă că clasele obținute pe baza unui criteriu trebuie să se excludă între ele, doar clasele obținute pe baza unor criterii deosebite se pot intersecta între ele sau se pot afla în relație de ordine (unele sînt subordonate altora). De aci decurge că putem obține noi clase prin intersectare (exemplu clasa propozițiilor care stau la baza silogisticii aristotelice A, E, I, O, unde s-a îmbinat criteriul calității cu cel al cantității și al structurii de tipul S este P). Putem apoi generaliza unele criterii. Aceasta înseamnă că vom obține în clasa mai generală noi clase după criteriul respectiv. De exemplu, după criteriul cantității aplicate la propozițiile neelementare vom obține pe lîngă clasele deja

existente „clase mixte" în care unele propoziții au o componentă universală și alta singulară („Toți filozofii sînt muritori și Socrate este muritor"), altele au o componentă universală și una particulară („Toate mamiferele sînt animale și unele mamifere sînt carnivore") etc. În general, prin asemenea generalizări putem obține *clase omogene* (ca și mai sus) sau *clase mixte*. Astfel, dacă modalitatea se aplică propozițiilor ca întreg atunci obținem clase omogene ca mai sus (de exemplu „Este posibil ca în 1975 să fie cald sau să plouă mult"), dacă se aplică fiecărei propoziții în parte putem obține clase mixte („Dacă este necesar ca $2 + 2 = 4$ atunci este posibil ca $2 < 4$"). La fel generalizarea pentru întreaga mulțime de expresii propoziționale cere anumite considerații speciale (cititorul poate încerca singur, ca exercițiu asemenea generalizări ale criteriilor în măsura în care acest lucru este posibil).

Clasificarea de mai sus urmărește în ultima instanță principiul exhaustiunii, se poate însă adopta o poziție mai pragmatică: a indica criteriul și a fixa prin simplă enumerare clasa care ne interesează (chiar dacă nu este constituită exhaustiv).

Observație. În logica generală judecățile se clasifică și după așa-numitul criteriu al „relației" (A nu se confunda cu judecățile de relație): categorice, ipotetice, disjunctive. Judecățile categorice nu cuprind o condiționare, cele ipotetice cuprind o condiționare, iar cele disjunctive o incertitudine („A sau B" nu e cert care din două). S-ar putea spune că e vorba de gradul de certitudine cu care ele sînt asertate: A e cert (categorice), B e cert numai dacă A (ipotetice), Nu e cert care A sau B (disjunctive). Într-un anumit sens aserțiunile categorice cuprind soluția problemei, în timp ce cele ipotetice și disjunctive conțin probleme nerezolvate.

Atît termenii cît și expresiile propoziționale sînt studiate în vederea studiului raționamentelor și în genere a legilor de raționare, ceea ce rezultă chiar din definiția logicii. Tot de aci rezultă că *orice teorie logică are la bază o anumită clasă de expresii propoziționale* (*și în genere o anumită clasificare a expresiilor propoziționale*). De asemenea logica poate fi compartimentată în funcție de determinările expresiilor propoziționale; formalismele logice pot fi raportate la forma gramaticală, teoriile logice la clasificările sintactice sau la cele semantice (aci teoria funcțiilor de adevăr, semantica logică), or la criteriul valorii de întrebuințare (pragmatica logică).

După tipul de expresii propoziționale vom avea apoi logica propozițiilor (are la bază clasificarea după tipul de operator propozițional), logica predicatelor are la bază expresii de structura „x are proprietatea F" cu specificarea cantității sau nu, logica claselor are la bază schema „x aparține clasei K", logica relațiilor are la bază schema „x are relația R cu y", logica modală are la bază clasificarea după modalitate, iar logicile polivalente clasificarea după valoarea logică. La rîndul ei teoria definiției studiază propozițiile definitorii și raționarea pe baza lor. Un rol deosebit în logică îl joacă punctul de vedere extensional și cel intensional (în termeni tradiționali „sfera" și „conținutul").

Extensiunea unui termen este mulțimea de obiecte pe care o asociem termenului prin relația de desemnare, iar intensiunea este determinarea grație căreia este distinsă respectiva mulțime de obiecte. Astfel extensiunea termenului „om" este mulțimea oamenilor, iar intensiunea este însușirea *de a fi om*. Pe această deosebire se bazează și logica claselor de logica predicatelor. În ce privește silogistica noi am introdus teza (v. „Logica și adevăr") că aci sînt vizate expresii propoziționale în care nu se face distincția între intensiunea și extensiunea termenilor, ci că ele sînt considerate simultan (nediferențiat), că sînt în același timp intensional-extensionale (sau, cum ar spune Carnap, „neutre").

Considerarea propozițiilor din punctul de vedere extensional dă logicii posibilitatea să se apropie de teoria mulțimilor și chiar să se folosească de metodele acesteia. Diagramele lui Euler și cele ale lui John Venn sînt primele metode de acest gen utilizate în logică.

În loc de „termeni" logica generală preferă să vorbească cel mai adesea de „noțiune" (uneori „concept"), iar în loc de „expresie propozițională" ea vorbește de „judecată". Datorită importanței pe care o au considerațiile de limbaj în logica matematică sînt preferate expresiile „termen" și „expresie propozițională" care se referă implicit la noțiune și resp. la judecată.

Noțiunea este totalitatea propozițiilor despre un obiect totalitate organizată după anumite criterii logice (*clasificare*, *deducție*, *definiție*). Aceasta este, ca să spunem așa, definiția de bază, dar de aci pot fi introduse altele mai abstracte.

Noțiunea este conținutul termenului (adică totalitatea determinărilor fixate în propozițiile corespunzătoare). Termenul nu desemnează noțiunea ci obiectul, însă el este legat, prin ansamblul de propoziții din care este formată noțiunea și în care el joacă un rol de *subiect*, de noțiune. Astfel termenul „om" desemnează mulțimea oamenilor, dar el intervine ca subiect în toate propozițiile care spun ceva despre om (sau cel puțin legătura sa cu astfel de propoziții este subînțeleasă). Determinările fixate în noțiune se numesc și „notele" noțiunii.

În ce privește judecata ea este informația pe care o cuprinde expresia propozițională. De notat este că distincția termen-noțiune intervine adesea în studiul definiției. Deosebit de important în studiul relațiilor inferențiale (logice) între expresiile propoziționale este studiul relațiilor de extensiune și de conținut între termeni (tradițional „relațiile între sferă și relațiile de conținut"). Fiind dați doi termeni A și B relațiile extensionale dintre ei pot fi următoarele:



Fig. 1

1. Relație de identitate (ex. „om" și „rațional"). 2. Relație de intersecție (ex. „student" și „sportiv"). 3. Relație de ordonare (resp. subordonare a lui B față de A și supraordonare a lui A față de B, vezi „animal" și „om"). 4. Relație de excludere (ex. „cîine" și „pisică").

În raport cu conținutul, doi termeni pot fi identici („număr natural" și „număr cardinal inductiv"), simplu diferențiați („cîine" și „pisică"), contrarii (cei care au note opuse, de exemplu „alb" și „negru", „bun" și „rău", „frumos" și „urît"), contradictorii (unul se caracterizează prin absența notelor celuilalt, ex. „om", „non-om") și necomparabili (ex. „pătrat" și „alb").

În ce privește relațiile dintre judecăți logica se interesează de relații de natură inferențială, adică astfel de relații care ne permit să trecem în mod necesar sau cu o anumită probabilitate de la expresii propoziționale adevărate la alte expresii

propoziţionale de asemenea adevărate. Astfel de relaţii se numesc „inferenţiale", iar legile care satisfac condiţia de mai sus se numesc legi de raţionare (or forme de raţionare, or, în speţă, raţionamente).

4. ELEMENTE DE LOGICĂ DEDUCTIVĂ GENERALĂ

Logica deductivă studiază legile de raţionare cu expresii propoziţionale de acelaşi grad de generalitate, sau cu grade de generalitate diferite (de la mai generale la mai puţin generale). Cînd avem de a face doar cu două expresii propoziţionale spunem că inferenţa este *imediată*, în cazul că avem mai mult de două expresii propoziţionale inferenţa este mediată. Inferenţele pot fi exprimate cu ajutorul unor propoziţii ipotetice (implicative) sau pur şi simplu prin punerea expresiilor una după alta (respectiv una sub alta) ori prin indicaţia că „... se deduce din — — —".

Un loc deosebit în logica veche îl ocupă inferenţele cu judecăţile A, E, I, O, judecăţile ipotetice (de implicaţie), disjunctive şi, într-o anumită măsură, modale.

Un rol important în ce priveşte inferenţele imediate îl ocupă relaţiile din „pătratul logic".

Ce este pătratul logic? Pătratul logic este o mulţime de patru propoziţii (resp. expresii propoziţionale) A, B, C, D (considerate în cadrul aceluiaşi criteriu de clasificare) astfel că A este incompatibil cu B, A exclude pe D şi B exclude pe C, A este supraordonat lui C şi B este supraordonat lui D, B şi C sînt disjuncte fără a se exclude. Cele patru tipuri de raporturi se numesc respectiv „contrarietate", „contradicţie", „subordonare" şi „subcontrarietate". Ele se definesc după cum urmează (independent de forma judecăţilor).

Fie X şi Y două propoziţii.

a) X este contrar cu Y dacă şi numai dacă X şi Y nu pot fi împreună adevărate.

b) X este contradictoriu cu Y dacă şi numai dacă nu pot fi împreună adevărate sau împreună false.

c) X este subordonat lui Y dacă şi numai dacă ori de cîte ori Y este adevărat X este adevărat.

d) X este subcontrar cu X dacă şi numai dacă X şi X nu pot fi împreună false.

Ori de cîte ori există un grup de patru propoziţii care sînt dispuse în raporturi conform cu condiţiile a.—d. avem un pătrat logic. S-a constatat că mulţimea A, E, I, O (resp. judecăţile univ-afirmativă, universal-negativă, particular-afirmativă şi particular-negativă) formează o mulţime descrisă de pătratul logic, ceea ce se reprezintă astfel:

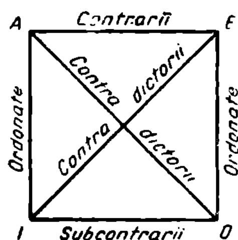


Fig. 2

Se înţelege că o pereche dată (X, Y) nu se poate afla decît într-unul din raporturile indicate şi nu în mai multe.

Pe baza raporturilor din pătratul logic putem formula o serie de inferenţe, ca de exemplu:

(1) Dacă X este contrar cu Y şi X este adevărat atunci Y este fals;

(2) Dacă X este contradictoriu cu Y şi X este adevărat atunci Y este fals;

(3) Dacă X este contradictoriu cu Y şi X este fals atunc Y este adevărat;

(4) Dacă X este supraordonat lui Y şi X este adevărat atunci Y este adevărat ş.a.m.d.

Unele inferenţe sînt bazate pe inversarea termenilor („conversiunile"), fără schimbarea cantităţii (conversiune simplă) sau cu (conversiune prin accident);

(5) Dacă toţi S sînt P atunci unii P sînt S (prin accident).

(6) Dacă nici un S nu e P atunci nici un P nu e S (simplă) ş.a.m.d.

Alte inferenţe ţin de utilizarea negaţiei (ex. obversiunea).

(7) Dacă toţi S sînt P atunci nici un S nu e non-P. Obversiunea face trecerea de la o judecată la alta prin introducerea (sau chiar eliminarea negaţiei) fără a afecta ordinea termenilor.

Obversiunea împreună cu conversiunea dau contrapoziţia:

(8) Dacă toți S sînt P atunci toți non-P sînt non-S. Silogismele sînt inferențe cu cel puțin trei judecăți și trei termeni. Silogistica (= teoria silogismului) dă regulile generale prin care se decide dacă un silogism este sau nu valabil. Silogismele sînt clasificate în „figuri" (după poziția așa-numitului termen mediu). Fiecare silogism (formă silogistică) se mai numește „mod".

(9) Dacă toți A sînt B și toți B sînt C atunci A este C. (Nu insistăm mai mult).

Un loc deosebit îl au raționamentele numite ipotetico-categorice.

(10) Dacă p implică q atunci non-*q* implică non-*p*.

(11) Dacă p implică q și este adevărat p atunci este adevărat q.

Exemple pentru (4), (9) și (11).

Dacă toți oamenii sînt muritori atunci și unii oameni sînt muritori. Dacă toate romburile sînt paralelograme și toate paralelogramele sînt patrulatere atunci și toate romburile sînt patrulatere. Dacă plouă atunci îmi iau umbrela, or plouă, deci îmi iau umbrela. Fiecare expresie propozițională are un „statut valoric" descris de așa-numitele principii logice.

Principiul identității. Orice propoziție este echivalentă cu sine ($p \equiv p$).

Principiul non-contradicției. O propoziție nu poate să fie în același timp și sub același raport adevărată și neadevărată.

Principiul terțului exclus. O propoziție este în același timp și sub același raport sau adevărată sau neadevărată a treia posibilitate nu există (tertium non datur).

Logica generală studiază de asemenea o serie de condiții specifice demonstrației (resp. respingerii), precum și cele mai importante erori de demonstrație.

În tratatele de logică generală este inclusă și teoria inducției, pe care noi însă o vom omite aci.

Vom vedea că teoria silogismului care are la bază schema de tipul „S este P" poate fi reconstruită cu ajutorul mijloacelor logico-matematice. Notăm că silogistica a fost după Aristotel interpretată ba extensional, ba intensional, lucruri posibile avînd în vedere că oricărei propoziții îi corespunde o extensiune și o intensiune, totuși prin aceste interpretări nu se face altceva decît să se treacă fie la logica claselor, fie la logica predicatelor pierzîndu-se specificul operării cu propoziții neutre (ceea ce caracterizează limbajul natural).

II

LOGICA PROPOZIŢIILOR

1. OPERATORII PROPOZIŢIONALI. SIMBOLURI

Vom considera expresiile propoziţionale compuse cu ajutorul negaţiei sau al diferitelor conjuncţii („şi", „sau", „dacă... atunci" etc.). Putem chiar pentru moment să limităm mulţimea expresiilor propoziţionale la propoziţii care sînt fie adevărate, fie false (nu însă şi adevărate şi false deodată). Vom considera pe rînd propoziţiile respective. Pentru a beneficia de la început de o exprimare prescurtată vom nota o propoziţie oarecare cu una din literele *p*, *q*, *r*,

a. Propoziţii de formă negativă. Aceste propoziţii se formează cu ajutorul particulei „nu" (resp. a expresiei „Nu este adevărat că..."). Poziţia lui „nu" într-o propoziţie este diferită şi în genere trebuie să distingem între „a fi propoziţie de formă negativă" şi „a fi negaţia unei propoziţii". În cele ce urmează pe noi ne interesează în special „negaţia unei propoziţii". Propoziţii de formă negativă pot fi formate în legătură cu oricare altă propoziţie. O propoziţie de formă negativă poate fi comparată cu o altă propoziţie dacă ele au termeni comuni. De exemplu, „dacă plouă nu-mi iau umbrela", „plouă şi nu-mi iau umbrela", „nu este adevărat că dacă plouă îmi iau umbrela", „dacă nu plouă îmi iau umbrela" şi „dacă plouă îmi iau umbrela" pot fi comparate între ele. Se înţelege că ele se vor raporta diferit una la alta.

În ce priveşte negaţia unei propoziţii *p* ca regulă simplă vom spune că dacă *p* este o propoziţie atunci „nu este adevărat *p*" va fi negaţia lui *p*. Vom distinge următoarele probleme:

— cazurile de propoziţii negative,
— formarea negaţiei unei propoziţii,
— raportul negaţiei cu afirmaţia.

Propoziţiile cu negatie pot fi clasificate după poziţia pe care o ocupă negaţia („nu”) în propoziţie: în faţa propoziţiei („Nu este adevărat că toţi S sînt P”), pe legătură. („Nici un S *nu* este P”) şi pe termeni („Unii S sînt non-P”). Formarea negaţiei unei propoziţii *p* coincide cu formarea contradictoriei ei, adică o propoziţie de forma „Nu este adevărat p” sau variantele obţinute din aceasta prin deplasarea negaţiei.

Pentru forma „Toţi S sînt P” vom avea „Nu este adevărat că toţi S sînt P”, „Unii S nu sînt P” şi „Unii S sînt non-P”.

În ce priveşte raportul unei negative cu afirmativa care are aceiaşi termeni constatăm:

— negaţia unei propoziţii nu este totuna cu contradictoria în genere, ea este doar un caz de contradictorie, căci pe de o parte afirmaţia însăşi este contradictoria negaţiei, iar pe de altă parte contradictoria afirmaţiei poate avea ea însăşi formă afirmativă (ex. „$2 = 4$ sau $2 < 4$” este contradictorie lui „$2 > 4$”),

— negativa poate fi raportată la o afirmativă cu aceiaşi termeni în unul din modurile: ca o negaţie totală (contrarie), ca o negaţie parţială (contradictorie), ca o negaţie slabă (subcontrarie) cînd pot fi şi amîndouă adevărate.

De exemplu, pentru „Toţi S sînt P” propoziţia „Nici un S nu este P” este o negaţie totală, iar „Unii S nu sînt P” este o negaţie parţială. Faţă de „Unii S sînt P”, „Nici un S nu e P” este totală, iar „Unii S nu sînt P” este slabă.

În acest text noi vom înţelege prin „a forma negaţia unei propoziţii” a construi propoziţia negativă contradictorie (poziţia negaţiei putînd fi diferită).

Exemple. „Toate numerele naturale sînt numere întregi”. Negaţia ei va fi „Nu toate numerele naturale sînt numere întregi”.

Pentru propoziţia „dacă plouă îmi iau umbrela” negaţia va fi „nu este adevărat că «dacă plouă îmi iau umbrela»” sau forma şi mai interesantă „plouă şi nu-mi iau umbrela”.

Pentru propoziţia „cel puţin doi sportivi români au vîrsta de 15 ani” negaţia va fi „nici măcar doi sportivi români nu au vîrsta de 15 ani”.

O problemă care interesează nemijlocit logica propozițiilor este caracterizarea lor din punctul de vedere al valorii logice. Ca rezultat se obține ceea ce s-a numit „reguli de adevăr”.

Reguli de adevăr pentru negație

i) Dacă *p* este propoziție adevărată, atunci non-*p* este falsă (și reciproc).

ii) Dacă *p* este propoziție falsă atunci non-*p* este adevărată (și reciproc).

Exemple. „$2 > 1$” (adevărată), „$2 \not> 1$” (falsă) „$2 = 1^2$” (falsă) „$2 \neq 1^2$” (adevărată).

iii) Dacă o negație se aplică altei negații atunci obținem o dublă negație care este echivalentă cu o afirmație.

Simbolizare. În logica matematică ne folosim de expresia „non-*p*” (sau „nu *p*” sau „nu este adevărat *p*”) numai pentru citire, în scris negația este reprezentată de un simbol. Noi vom utiliza simbolul „—” și vom scrie „$\bar{p}$” (citește „non-*p*”). Se mai utilizează semnele $\neg$, $\sim$, $'$, N și se scrie respectiv $\neg p$, $\sim p$, p', Np.

C. Propoziția conjunctivă. Propoziția conjunctivă este de forma „p și q”. Ex. „Napoleon a învins la Austerlitz și a pierdut la Waterloo”. Propoziția conjunctivă constă din două sau mai multe propoziții legate între ele prin conjuncția „și” sau prin alte conjuncții care au sens asemănător cu al acesteia (ex. „cu”, „dar”, „iar” ș.a.m.d.) Uneori joacă rol de conjuncție virgula, ca în exemplul „Ion, Gheorghe, Mihai și Dumitru sînt studenți”. Se poate de asemenea exprima și prin „p în timp ce q”.

Conjuncția poate să stea între propoziții (ca în primul exemplu) sau între termeni (ca în al doilea exemplu). Conjuncția este o legătură foarte slabă ea înseamnă că stările de fapt (între care există o oarecare altă legătură) au loc deopotrivă. Noi nu unim la întîmplare propozițiile în conjuncție ci numai dacă între stările de fapt există o oarecare legătură. De exemplu, „$2 + 2 = 4$ și eu îmi mănînc căciula” nu presupun vreo legătură (și nu s-a dat anterior un context din care să decurgă că are sens să le conjugăm). De remarcat este că uneori „și” exprimă o relație orientată cum e în cazul exemplului „X adormi și visă un balaur”. Aci între stările de fapt *a adormi* și *a visa* există o ordine ireversibilă (nu poți să visezi înainte de a adormi). Sensul în care luăm noi con-

juncţia aci este indiferent faţă de orientare, aşa cum se întîmplă în sistemul ecuaţiilor matematice cînd ordinea ecuaţiilor nu are importanţă.

$$\begin{cases} x + 3 = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x + y = 7 \\ x + 3 = 5 \end{cases}$$

Am spus că conjuncţia poate sta între termeni sau între propoziţii, dar se pot stabili reguli de trecere de la o poziţie la alta pentru diferite tipuri de propoziţii.

Fie schema „Toţi S sînt P”. Dacă lui S i se aplică mai multe predicate noi avem două posibilităţi de scriere a conjuncţiei. „Toţi S sînt P_1 şi P_2 şi P_3 şi ... şi P_n sau „Toţi S sînt P_1 şi toţi S sînt P_2 şi ... şi toţi S sînt P_n”. Analog, dacă avem un predicat cu mai multe subiecte avem două posibilităţi de scriere: „Toţi S_1 şi S_2 şi ... şi S_n sînt P” sau „Toţi S_1 sînt P şi toţi S_2 sînt P şi ... şi toţi S_n sînt P”. Exemple: „Rombul şi pătratul sînt paralelograme” $\equiv$ „Rombul este paralelogram şi pătratul este paralelogram”. „Pătratul este patrulaterul cu toate unghiurile drepte şi toate laturile egale” $\equiv$ „Pătratul este patrulaterul cu toate unghiurile drepte şi pătratul este patrulaterul cu toate laturile egale”. (Se înţelege că nu orice formă de propoziţie permite astfel de echivalenţe). În continuare ne ocupăm numai de conjuncţia între propoziţii.

Reguli de adevăr

i) Dacă conjuncţia este adevărată atunci toţi membrii ei sînt adevăraţi.

ii) Dacă cel puţin un membru al conjuncţiei este fals conjuncţia este falsă.

iii) Dacă conjuncţia este falsă atunci membrii ei sînt sau ambii falsi sau numai unul. În presupunerea că sînt garantate condiţiile că nu există conjuncţii fără sens şi că toate sînt adevărate sau false se poate formula şi regula:

iv) Dacă toţi membrii conjuncţiei sînt adevăraţi atunci conjuncţia este adevărată. Aceste reguli nu au caracter *formativ*, ci *descriptiv*, adică ele nu trebuie interpretate, de exemplu, în sensul că dacă luăm o propoziţie adevărată şi o conjugăm cu o altă propoziţie adevărată atunci obţinem o conjuncţie adevărată, ci că avînd deja *dată* o conjuncţie care este fie adevărată, fie falsă (nu fără sens), dacă membrii ei sînt adevăraţi valoarea ei este de asemenea adevăr.

Regulile de mai sus descriu cum se raportează valoarea propozițiilor componente la valoarea propozițiilor compuse. Notînd adevărul cu v (veritas) și falsul cu f (falsitas) iar conjuncția cu „p și q" putem reformula regulile de mai sus astfel:

i) Dacă p și q este v atunci p este v și q este v etc.

Simbolizare. Pentru a simboliza conjuncția vom folosi semnul „•", și vom scrie „$p \cdot q$" (citește „p și q". Se mai folosesc semnele: &, $\wedge$, $\cap$, K, și se scrie respectiv „p & q", „$p \wedge q$", „$p \cap q$" și „Kpq". După cum am mai spus o propoziție poate avea mai mulți membri, ex. „$p \cdot q \cdot r \cdot s$". Dacă o conjuncție se aplică deja altor conjuncții ne putem folosi de paranteze, de exemplu: „$(p \cdot q) \cdot (q \cdot r)$". Conjuncția poate fi aplicată și negației, ex. „$p \cdot \bar{q}$", după cum negația poate fi aplicată conjuncției, ex. „$\overline{p \cdot q}$". Dacă termenii conjuncției sînt ordonați $p_1, p_2, \ldots p_n$ atunci o conjuncție de n membri poate fi scrisă astfel:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \equiv p_1 \cdot p_2 \cdot \quad \cdot p_n$$

(unde „Π" înseamnă *produs logic*, adică tot conjuncția numită astfel din cauza unor analogii cu produsul aritmetic). Conjuncția poate fi apoi aplicată „produselor" astfel:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \cdot \prod_{j=1}^{m} q_j$$

(Prin acest fel de scriere se face economie și chiar pot fi dezvoltate anumite proprietăți).

c) **Propoziții disjunctive.** Acestea sînt propoziții formate cu ajutorul conjuncției „sau" (or a altor conjuncții cu sens asemănător) de forma „p sau q" or „sau p sau q". Ex., „Bolnavul de la ORL suferă de gît sau suferă de nas sau suferă de urechi", „sau erai la fața locului sau te ascunseseși pe undeva". Înțeles apropiat de al lui „sau" pot avea conjuncțiile „ori", „fie... fie" ș.a. Uneori se folosește virgula în loc de „sau", ex. „Ion, Gheorghe sau Dumitru au fost ieri aici".

De remarcat este că „sau" are două înțelesuri, un înțeles neexclusiv ca în primul exemplu („bolnavul de la ORL etc".), unde bolnavul poate suferi de una din boli, de două sau chiar

de toate trei, şi un înţeles *exclusiv* ca în exemplul „$2 < 4$ sau $2 = 4$ sau $2 > 4$” unde nu e posibil decît un caz („$2 < 4$”). În limba latină pentru „*sau*” neexclusiv se foloseşte „vel”, iar pentru cel exclusiv „aut” (aut Caesar aut nihil). În româneşte există o conjuncţie populară asemănătoare cu „aut” anume „au” („da au ba?”). În vederea exprimării excluderii se mai poate folosi „*sau*” repetat („sau p sau q”). Sensul lui „sau” neexclusiv este prin urmare acesta: cel puţin una din stările de fapt are loc, iar sensul lui „sau” exclusiv este acesta: numai una din stările de fapt (exprimate de propoziţiile componente) are loc.

Exemplele pentru „sau” neexclusiv sînt mai greu de dat. Iată încă un exemplu: „În triunghiul ABC, unghiul B sau unghiul C este ascuţit”.

Vom conveni să numim pur şi simplu „disjuncţie” propoziţia disjunctiv-neexclusivă (sau „alternativă”), iar pe cea exclusivă „excludere”. Excluderea o notăm cu $+$ şi vom scrie „$p + q$” (citeşte „p exclude q”).

Ca şi conjuncţia disjuncţia poate să se afle între termeni sau între propoziţii. Ex. „Unii S sînt P_1 sau P_2 sau... P_n” şi „Unii S sînt P_1 sau unii S sînt P_2 sau... sau unii S sînt P_n”. (Nu în toate cazurile formulările sînt echivalente).*

În continuare ne vom ocupa de disjuncţia (neexclusivă).

Reguli de adevăr

i) Dacă disjuncţia este adevărată atunci cel puţin un membru este adevărat.

ii) Dacă nici un membru nu este adevărat, disjuncţia este falsă.

iii) Dacă cel puţin un membru este adevărat, disjuncţia este adevărată etc. Pentru cazul în care disjuncţia este adevărată conform cu regula i) vom avea trei posibilităţi (pentru doi membri): (v v), (v f), (f v). Iată exemple pentru fiecare:

„Pătratul este dreptunghi cu toate laturile egale sau romb cu toate unghiurile egale” (ambele componente sînt adevărate, deci avem cazul v v).

„Orice număr natural n ($n \geqslant 1$) este divizibil cu 2^0 sau este divizibil cu 2^1” (componentele sînt v f).

„Orice număr natural este o putere a lui 2 sau orice număr natural n ($n > 0$) este divizibil cu 2^0” (componentele sînt

* Evident, ca şi în cazul conjuncţiei ne interesează disjuncţia între expresii propoziţionale.

f, v). Pentru cazul cînd disjuncția este falsă putem folosi exemplul:

„Orice număr natural satisface teorema lui Fermat sau orice număr natural infirmă teorema lui Fermat” (componentele sînt f, f).

Simbolizare. Disjuncția se simbolizează prin semnul „V” și se scrie „$p \vee q$” (citește „p sau q”). Se mai utilizează semnele „$\cup$”, „A” și se scrie respectiv „$p \cup q$, „$A\, p\, q$”.

O disjuncție poate avea mai mulți membri, ex. „$p \vee q \vee r \vee \vee s$”. Ea poate fi aplicată și negațiilor, ex. „$\bar{p} \vee q$”, precum și conjuncțiilor (în care caz se folosesc paranteze), exemplu, „$(p \cdot q) \vee (p \cdot r)$”, or atît negațiilor cît și conjuncțiilor, ex. „$(\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$”, or și disjuncțiilor „$(p \vee q) \vee (q \vee r)$” și „$(\bar{p} \vee q) \vee r$” și „$\bar{p} \vee (q \cdot r)$ etc. Conjuncția și negația pot fi aplicate disjuncției „$p \cdot (q \vee r)$”, „$\overline{p \vee q}$” etc.

Pentru simplificarea scrierii putem face o convenție: cînd avem o expresie care conținea atît conjuncția cît și disjuncția convenim să omitem semnul care ne interesează mai puțin și să scriem literele (or, expresii mai complicate) una lîngă alta înțelegînd că ele se leagă mai întîi între ele și apoi cu semnul scris. Ex. în loc de $(p \cdot q) \vee r$ putem scrie $pq \vee r$ (omiterea conjuncției) sau $(p \cdot q)r$ (omiterea disjuncției).

Dacă termenii disjuncției sînt ordonați: $p_1, p_2 \quad p_n$ atunci putem scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \equiv p_1 \vee p_2 \vee \quad \vee p_n$$

(unde „Σ” înseamnă *suma logică* adică disjuncția numită astfel din cauza unor analogii cu suma aritmetică). Disjuncția poate fi aplicată și sumelor logice (deci putem utiliza ambele semne):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \vee \sum_{j=1}^{m} q_j$$

Termenii „produs logic” și „sumă logică” sînt adesea folosiți respectiv în loc de conjuncție și de disjuncție.

d) **Propoziții implicative.** Unele propoziții compuse au forma „dacă *a* atunci *b*” unde „*a*” și „*b*” pot desemna o cauză și respectiv un efect (implicația cauzală), două proprietăți (implicația conceptuală), o mulțime de premise și respectiv

o mulțime de concluzii (implicația deductivă). Exemple: Propoziția „dacă se încălzește termometrul atunci mercurul se urcă” exprimă o implicație cauzală; propoziția „dacă poligonul (euclidian) are trei laturi suma unghiurilor sale are $180°$” exprimă o relație între două proprietăți („concepte” cum mai denumesc unii proprietățile), iar propoziția „dacă $2 = 2^1$ și $2 = 1 + 1$ atunci $2^1 = 1 + 1$” este o implicație deductivă. Indiferent de ce „obiecte” vor desemna „*a*” și „*b*” dacă propozițiile care se referă la aceste obiecte sînt de așa natură că de la prima se poate ajunge prin deducție la ultima noi vom putea spune că avem o implicație deductivă de la „*a*” la „*b*”. Vom exprima această implicație astfel „dacă *p* atunci *q*”. Prin urmare „dacă *p* atunci *q*” va însemna „*q* se deduce din *p*” (unde *p* este condiție suficientă pentru *q* sau *q* este condiție necesară pentru *p*). Membrul „*p*” (care poate fi la rîndul lui o propoziție compusă) se va numi antecedent, iar „*q*” consecvent.

Reguli de adevăr

i) Este imposibil ca o implicație adevărată să aibă antecedentul adevărat și consecventul fals.

ii) Dacă antecedentul este adevărat și consecventul este fals, implicația este falsă.

Pentru implicația adevărată membrii se pot afla în una din situațiile (v v), (f v), (f f).

Exemple. Pentru cele trei cazuri de implicație adevărată:

„dacă $2^0 = 1$ și $1 = 3^0$ atunci $2^0 = 3^0$” (vv)

„dacă $2 = 1^2$ și $1^2 = 2^0 + 2^0$ atunci $2 = 2^0 + 2^0$” (f, v)

„dacă $2 = 1^2$ și $1^2 = 0^1$ atunci $2 = 0^1$” (ff).

Toate aceste trei implicații sînt adevărate în virtutea teoremei „pentru orice (a, b, c) dacă $a = b$ și $b = c$ atunci $a = c$”.

Se observă că antecedentul (*p*) este o conjuncție de două propoziții (ex. „$2^0 = 1$ și $1 = 3^0$”). Pentru regula ii) avem exemplul: „dacă triunghiul dreptunghic are două laturi perpendiculare atunci el are două unghiuri ascuțite egale”. Este adevărat că „triunghiul (adică *orice* triunghi) dreptunghic are două laturi perpendiculare”, dar nu este adevărat că „orice triunghi dreptunghic are două unghiuri ascuțite egale”.

Simbolizare. Vom simboliza implicația prin $\rightarrow$ și vom scrie „$p \rightarrow q$” (citește „*p* implică *q*” sau „dacă *p* atunci *q*”). Pentru implicație se folosesc și alte semne ca $\Rightarrow$, $\supset$, C și se scrie respectiv $p \Rightarrow q$, $p \supset q$ și Cpq.

Implicației $p \to q$ îi corespunde inversa (reciproca) $q \to p$. Implicația poate fi aplicată expresiilor formate prin —, •, $\vee$ după cum acestea pot fi aplicate implicației. Ex. $(pq \vee r) \to \to \bar{r})$. Ea poate fi aplicată și unor expresii formate tot cu implicația: $(p \to q) \to r$ etc.

e. **Propoziții de echivalență** (notate $p = q$). Propozițiile de echivalență au forma „p dacă și numai dacă q". Astfel de expresii pot avea de asemenea mai multe sensuri (printre care și dependența exclusivă a lui p de q) dar noi vom avea în vedere numai sensul: „p se deduce din q și q se deduce din p". Prin urmare echivalența se reduce la o conjuncție de două implicații $p \to q$ și $q \to p$.

Exemplu: „Rombul este pătrat dacă și numai dacă are toate unghiurile drepte" se descompune în „dacă rombul este pătrat atunci el are toate unghiurile drepte" (implicația directă) și „dacă rombul are toate unghiurile drepte atunci el este pătrat" (implicația reciprocă). Considerațiile referitoare la sensurile implicației pot fi extinse și asupra propozițiilor de forma „p dacă și numai dacă q".

Reguli de adevăr

i) Dacă echivalența este adevărată atunci ambii membri sînt adevărați (vv) sau ambii membri sînt falși (ff).

ii) Dacă echivalența este falsă atunci valoarea membrilor ei diferă (vf) sau (fv).

Simbolizare. Vom simboliza echivalența prin $=$ și vom scrie „$p = q$" (citește „p este echivalent cu q" sau „p dacă și numai dacă q"). Se mai folosesc semnele, $\leftrightarrow$, $\equiv$, $\sim$ și E și se scrie respectiv „$p \leftrightarrow q$", „$p \equiv q$", „$p \sim q$", „Epq". Noi vom folosi uneori semnul „$\equiv$" pentru a marca o echivalență logic adevărată. Echivalența poate fi folosită de asemenea în combinație cu propozițiile introduse mai sus, ex. „$p = (q \cdot \bar{r})$", „$(p = q) = ((p \cdot q) \vee \bar{r})$".

f. **Alte feluri de propoziții.** O propoziție interesantă este cea de forma „fie că nu p fie că nu q". Ea este o disjuncție de propoziții negative și poartă numele de „anticonjuncție" sau „incompatibilitate".

Ex. „Fie că copiii slabi nu dorm destul fie că nu se pot îngrășa". Incompatibilitatea se simbolizează prin / și se scrie „p/q" (citește: „p este incompatibil cu q" sau „fie că nu e p,

fie că nu e *q*”). Un alt fel de propoziție considerată în logică este cea de forma „nici *p*, nici *q*”, ea este numită și „antidisjuncție”. *Exemplu*: „Nici nu merg la teatru, nici nu rămîn acasă”.

Această propoziție o vom nota cu „$p \swarrow q$” (citește „nici p, nici q”). Pentru a marca o anumită simetrie între „p/q” și „$p \swarrow q$” putem utiliza, atunci cînd le luăm în considerație pe ambele, în locul notației „p/q” notația $p \nearrow q$”. Expresia p/q se mai scrie Dpq.

g. **Recapitulare a simbolismului.** Litere *p*, *q*, *r*, sînt variabile propoziționale (desemnează propoziții adevărate sau false).

Semnele —, •, V, +, →, =, /, ↙ se numesc operatori sau functori logici sau conectori. Operatorii de forma N, K, A, C, E, D, au fost dați de Lukasiewicz și ei se supun unor reguli speciale, iar simbolismul lor se numește „scrierea poloneză”.

2. FUNCȚII DE ADEVĂR

a. **Definiții.** În paragraful anterior noi am analizat o serie de propoziții compuse sub raportul informației în general și a valorii logice. Formulînd diferite reguli de adevăr noi am avut în vedere faptul că adevărul și falsul se raportează la judecata (informația) pe care o exprimă propoziția. Dacă acum vom constitui anumite tabele în care vom pune valorile propozițiilor componente în stînga, iar pe cele ale propozițiilor compuse în dreapta vom obține anumite „distribuții” de valori specifice fiecărui fel de propoziție compusă în parte. Fie regulile de adevăr ale implicației (materiale). Conform cu aceste reguli vom avea tabelul:

pq	p → q
vv	v
vf	f
fv	v
ff	v

Se observă că tabelul acesta este structurat după anumite reguli de corespondență, — fiecărei perechi de valori pentru (*p*, *q*) îi corespunde o valoare și numai una pentru $p \rightarrow q$. (Ex. perechii vv îi corespunde valoarea v).

Or, prin definiție o corespondență univocă între două muțimi de obiecte (nu importă de ce natură) X și Y înseamnă funcție în care X este domeniul funcției, iar Y codomeniu O pereche de valori ex. (*vv*) va fi numită o *alegere de valori* „Variabilele (*p*, *q*) vor desemna „argumentele" funcției, iar expresia formată cu ajutorul operatorilor (ex. $p \to q$) va fi numită „expresie funcțională". Funcția de mai sus este *funcție logică* (uneori se spune *operație logică*) în speță o *funcție de adevăr* deoarece este definită pe mulțimi de valori logic (și ia valori de asemenea logice). Fiecare funcție de adevă poate fi definită fie printr-un tabel (ca mai sus) numit ș „matrice", fie prin regulile de corespondență (ușor de formula pe baza tabelelor), fie pe alte căi. Deoarece în cazul funcțiilo de adevăr intervine presupunerea că pentru a determina valoarea funcției este suficient să cunoaștem valoarea argumentelor presupunere care nu este valabilă pentru propozițiile compuse corespunzătoare (fără anumite restricții), noi nu vom ma vorbi de aci înainte de propoziții ca valori ale variabilelor ci pur și simplu de valorile logice (v, f) care vor fi tratate ca două „obiecte abstracte".

În conformitate cu această procedură abstractă vom proceda la reinterpretarea simbolurilor.

1. Variabilele *p*, *q*, *r*, . . . vor desemna entități din mulțimea (*v*, *f*) în așa fel că nici o variabilă nu va desemna în același timp entitatea *v* și entitatea *f*, ci una sau alta.

2. Expresiile constituite cu ajutorul operatorilor (functorilor) —, •, $\vee$, etc. vor desemna de asemenea entități din mulțimea (v, f) în condițiile impuse de regulile de corespondență. Despre ele vom spune de asemenea că reprezintă *funcții de adevăr*. Se mai poate considera că *p*, *q*, *r*, . . . reprezintă funcții propoziționale care *pot să devină* adevărate sau false (de exemplu, ecuații).

Funcțiile de adevăr vor purta denumirile propozițiilor corespunzătoare: *negație* (funcția negației), *conjuncție* (funcția conjunctivă), *disjuncție*, *implicație* numită și „implicație materială," *echivalență* etc.

Expresiile $\bar{p}$, $p \cdot q$, $p \vee q$, $p \to q$, $p = q$ etc. se citesc așa cum s-a arătat mai sus.

Definiții. Conceptul de „funcție de adevăr" se generalizează în așa fel încît variabilele vor desemna ele însele funcții (funcții

afirmative), iar ulterior vor fi incluse şi alte feluri de funcţii decît cele de mai sus.

Un mod simplu de a defini funcţiile este prin tabele („matrice”). Iată aceste definiţii prin matrice:

p	$\bar{p}$
v	f
f	v

pq	$p \cdot q$	pq	$p \vee q$	pq	$p \rightarrow q$	pq	$p = q$	pq	$p + q$	pq	p / q
vv	v	vv	v	vv	v	vv	v	vv	f	vv	f
vf	f	vf	v	vf	f	vf	f	vf	v	vf	v
fv	f	fv	v	fv	v	fv	f	fv	v	fv	v
ff	f	ff	f	ff	v	ff	v	ff	f	ff	v

În stînga sînt date valorile posibile ale argumentelor iar în dreapta valorile corespunzătoare ale funcţiilor.

Funcţiile pot fi apoi definite pe baza regulilor de corespondenţă care pot fi formulate pe baza matricelor indicate. Exemplificăm pentru conjuncţie:

i) Dacă p este v şi q este v atunci $p \cdot q$ este v;

ii) Dacă p este v şi q este f atunci $p \cdot q$ este f;

iii) Dacă p este f şi q este v atunci $p \cdot q$ este f;

iv) Dacă p este f şi q este f atunci $p \cdot q$ este f.

(Analog pentru celalte funcţii).

Se pot da însă definiţii mai scurte şi chiar mai generale decît cele date prin matrice.

(1) Numim *negaţie* funcţia a cărei valoare este v atunci cînd argumentul are valoarea f şi f cînd argumentul are valoarea v (deci funcţia a cărei valoare este inversă argumentului ei).

(2) Numim *conjuncţie* funcţia care este adevărată atunci şi numai atunci cînd toate argumentele ei sînt adevărate.

(3) Numim *disjuncţie* (alternativă) funcţia care este falsă atunci şi numai atunci cînd toate argumentele ei sînt false.

(4) Numim *implicaţie* funcţia care este falsă atunci şi numai atunci cînd antecedentul (p) este adevărat, iar consecventul (q) este fals.

(5) Numim *echivalenţă* funcţia care este adevărată atunci şi numai atunci cînd toate argumentele au aceeaşi valoare (sau toate adevărate sau toate false).

(6) Numim *excludere* funcţia adevărată atunci şi numai atunci cînd *numai* un argument are valoarea adevăr.

(Pentru disjuncţia neexclusivă se poate da şi următoare definiţie care poate fi comparată cu definiţia excluderii: di juncţia este adevărată atunci şi numai atunci cînd *cel puţi* un argument este adevărat).

(7) Numim *incompatibilitate* funcţia falsă atunci şi numa atunci cînd ambele argumente sînt adevărate.

(8) Numim *antidisjuncţie* funcţia adevărată atunci şi numa atunci cînd toate argumentele sînt false.

Dacă condiţiile (2)—(8) nu sînt satisfăcute, funcţiile vo avea valoarea inversă celei prescrise în definiţie.

b. Unele proprietăţi ale funcţiilor de adevăr. În continu are vom studia proprietăţile denumite comutativitate, asociati vitate, distributivitate, idempotenţă, reflexivitate şi tranzitivi tate. Fiecare din aceste proprietăţi se exprimă într-o „leg logică". Conjuncţia şi disjuncţia sînt comutative, adică valoa rea lor nu depinde de ordinea termenilor.

(1) $p \cdot q \equiv q \cdot p$

(2) $p \vee q \equiv q \vee p$

Aceleaşi sînt asociative, adică valoarea lor nu depinde de gruparea termenilor.

(3) $p \cdot (q \cdot r) \equiv (p \cdot q) \cdot r$

(4) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

Conjuncţia şi disjuncţia sînt distributive una faţă de alta.

(5) $p \cdot (q \vee r) \equiv (p \cdot q) \vee (p \cdot r)$

(6) $p \vee (q \cdot r) \equiv (p \vee q) \cdot (p \vee r)$

Semnul $\equiv$ înseamnă logic echivalent, ceea ce este mai mult decît simpla echivalenţă ($=$). Ori de cîte ori are loc echivalenţa logică are loc şi simpla echivalenţă (reciproca nu este adevărată). Tocmai de aceea în loc de $\equiv$ putem scrie $=$ dar invers nu întotdeauna. Să considerăm unele exemple. Conform cu (1) este tot una dacă spunem „pătratul este dreptunghi şi pătratul are toate laturile egale „sau" pătratul are toate laturile egale şi pătratul este dreptunghi". Pentru (2) putem considera două ipoteze, va fi indiferent în ce ordine le formulăm: „x este bolnav de nervi sau x este bolnav de cancer" este logic

echivalent cu „x este bolnav de cancer sau x este bolnav de nervi". Pentru (3) fie o serie de ipoteze medicale. Medicul afirmă:

a) X are cancer şi
b) X are hepatită sau X are ulcer.

Cu alte cuvinte pe lîngă cancer X mai are cel puţin una din cele două boli. Nu influenţează rezolvarea problemei dacă medicul o va formula astfel:

a) X are cancer şi hepatită sau
b) X are cancer şi ulcer.

Pentru (4) analog mediul afirmă:

a) X are cancer sau
b) X are ulcer şi hepatită.

Ipotezele pot fi reformulate astfel:

a) X are cancer sau ulcer şi
b) X are cancer sau hepatită.

Conjuncţia şi disjuncţia sînt *idempotente*, adică,

(7) $p \cdot p \equiv p$

(8) $p \vee p \equiv p$.

Implicaţia şi echivalenţa sînt reflexive şi tranzitive:

(9) $p \rightarrow p$ (10) $p = p$ (reflexivitate)

(11) $((p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ – tranzitivitate

(12) $((p = q) \cdot (q = r)) \rightarrow (p = r)$

Formulele (9), (10) sînt legi ale identităţii, iar (11) şi (12) legi ale tranzitivităţii, analog (1)—(8) poartă denumirea proprietăţii respective (ex. „legea comutativităţii" etc.). Tranzitivitatea implicaţiei poate fi exemplificată astfel: „Unele aniamale sînt oameni" se deduce din „Toţi oamenii sînt animale", „Unele animale nu sînt non-oameni" se deduce din „Unele animale sînt oameni" prin urmare ea se deduce şi din „Toţi oamenii sînt animale". Tranzitivitatea echivalenţei poate fi exemplificată pe baza transformărilor echivalente:

„$2x + 3 = 5$" se transformă în „$2x = 5 - 3$", iar aceasta în „$2x = 2$" prin urmare „$2x + 3 = 5$" este echivalentă cu „$2x = 2$".

Există şi alte proprietăţi care vor fi introduse ulterior o dat cu indicarea principalelor legi logice.

c. Relaţii de echivalenţă între expresiile logice. Unel expresii funcţionale sînt echivalente cu altele prin definiţie Astfel $p \rightarrow q$ poate însemna „nu este adevărat p (sau altfel este adevărat q", adică $\bar{p} \vee q$.

La rîndul ei echivalenţa este o conjuncţie între implicaţia directă şi cea inversă (reciprocă) $(p \rightarrow q \cdot q \rightarrow p)$. Aceasta înseamnă că în exprimare ne putem dispensa uneori de anumiţi operatori definindu-i prin alţii. Putem alege diferiţi operatori de bază, restul reducîndu-se la aceştia prin definiţie. Desigur, nu orice grup de operatori poate constitui o bază pentru toţi ceilalţi. Iată cîteva posibilităţi $(\cdot, -)$, $(\vee, -)$, $(\rightarrow, -)$, $(\cdot, \vee, -)$, $(/)$, $(\swarrow)$.

Grupul $(\cdot, \vee, -)$ formează grupul de operatori al aşa-numitei „algebre booleene". Ne vom opri tocmai asupra acestui grup. Iată definiţiile corespunzătoare ale restului operatorilor.

(13) $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$, (16) $p = q \equiv \bar{p}q \cdot \bar{q}p$
(14) $p/q = \bar{p} \vee \bar{q}$, (17) $p \swarrow q = \bar{p} \cdot \bar{q}$,
(15) $p + q \equiv \bar{p}q \vee p\bar{q}$

Nicod a redus toate expresiile funcţionale la exprimarea doar cu ajutorul operatorului / (denumit şi operatorul lui Sheffer).

(18) $\bar{p} \equiv p/p$ (23) $p \vee q \equiv (p/p)/(q/q)$
(19) $p \cdot q \equiv (p/q)/(p/q)$, (24) $p \rightarrow q \equiv p/(q/q)$
(20) $p + q \equiv ((p/(q/q))/(q/(p/q)))$
(21) $p = q \equiv ((p/(q/q))/(q/(p/p))/((p/(q/q))/q/(p/p)))$
(22) $p \swarrow q \equiv ((p/p)/(q/q))/((p/p)/(q/q))$

Functorul $\swarrow$ este de asemenea suficient pentru a-i defini pe toţi ceilalţi prin el.

d. Tabelul funcţiilor bivalente. La întrebarea cîte funcţii neechivalente putem construi pornind de la n variabile putem răspunde cu ajutorul egalităţii:

$$N = m^{m^n}$$

unde m = numărul de valori logice admise iar n numărul de variabile.

Dacă $m = 2$ (adică v, f) şi $n = 2$ (adică p, q) vom avea $2^{2^2} = 16$. Aceste 16 funcţii pot fi reprezentate într-un tabel. (Fiecare funcţie va fi notată apoi prin f_i unde i este indice numeric).

pq	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
vv	v	v	v	v	v	v	v	v	f	f	f	f	f	f	f	f
vf	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f
fv	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f
ff	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f

Unele din funcţiile din acest tabel au fost deja studiate:

$$f_2 = p \vee q,\ f_3 = q \rightarrow p,\ f_4 = p,\ f_5 = p \rightarrow q,\ f_6 = q,$$
$$f_7 = (p = q),\ f_8 = p \cdot q,\ f_9 = p/q,\ f_{10} = p + q,$$
$$f_{11} = \bar{q},\quad f_{13} = \bar{p},\ f_{15} = p \swarrow q$$

Nestudiate sînt încă funcţiile f_1, f_{12}, f_{14} şi f_{16}.

Funcţia f_1 poartă numele de „lege logică" sau „tautologie" sau „funcţie identic-adevărată" sau „identitate logică".

Funcţia f_{12} este negarea implicaţiei, f_{14} este negarea implicaţiei inverse, iar f_{16} este contradicţia (funcţia identic-falsă). În general funcţiile pot, conform cu acest tabel, să fie clasificate în trei categorii: *legi logice* (tautologii), *contradicţii* şi *funcţii realizabile.*

Iată definiţia fiecăreia din cele trei.

Numim *lege logică* funcţia logică adevărată independent de ce valori iau argumentele sale (din mulţimea (v, f)).

Numim *contradicţie* acea funcţie logică falsă independent de ce valori iau argumentele ei din mulţimea (v, f).

Numim funcţie *realizabilă* funcţia logică adevărată cel puţin într-un caz.

De observat este că în tabelul de mai sus funcţiile sînt opuse simetric faţă de jumătatea tabelului (f_1 este opusă lui f_{16}, lui f_{15} etc.), adică $f_{1+n} = f_{16-n}$ (unde n = 0, 7). De aci decurge că unele funcţii pot fi echivalate cu negaţia altora şi că putem opera o reducţie a exprimării. Din tabel decurge imediat că în loc de 16 funcţii putem utiliza 8, iar restul să fie introduse prin definiţie cu negaţie a celor 8. Vom vedea

că o asemenea reducție joacă un rol fundamental în logică și că ea stă la baza transformărilor calculatorii din această știință.

3. PROBLEMA DECIZIEI

Problema fundamentală a logicii simbolice este problema deciziei. Această problemă se formulează în felul următor: fiind dată o expresie logică și să se decidă dacă ea reprezintă o *lege logică* (tautologie), o *contradicție* sau este o funcție simplu *realizabilă.*

Această problemă poate fi rezolvată prin mai multe mijloace din care amintim: a) prin eliminarea treptată a necunoscutelor; b) prin algoritmi; c) pe baza metodei axiomatice. Eliminarea treptată a necunoscutelor se face pe baza unor raționamente prescurtate.

a) În vederea deciderii pe baza unor raționamente prescurtate este necesar să reținem cîteva reguli mai importante care decurg din definiția funcțiilor de adevăr.

R_1) Dacă un membru al conjuncției este fals, atunci conjuncția va fi falsă;

R_2) Dacă un membru al conjuncției este adevărat atunci valoarea ei va depinde de restul membrilor;

R_3) Dacă un membru al disjuncției este adevărat, disjuncția va fi adevărată;

R_4) Dacă un membru al disjuncției este fals, valoarea ei va depinde de restul membrilor;

R_5) Dacă consecventul implicației este adevărat, implicația va fi adevărată;

R_6) Dacă antecedentul implicației va fi fals, implicația va fi adevărată;

R_7) Dacă consecventul implicației va fi fals, implicația va depinde de antecedent;

R_8) Dacă antecedentul implicației va fi adevărat, valoarea implicației va depinde de consecvent;

R_9) Dacă un membru al incompatibilității va fi fals, incompatibilitatea va fi adevărată;

R_{10}) Dacă un membru al incompatibilității va fi adevărat, valoarea incompatibilității va depinde de celălalt membru;

R_{11}) Dacă un membru al antidisjuncției este adevărat, antidisjuncția va fi falsă;

R_{12}) Dacă un membru al antidisjuncției va fi fals, valoarea ei va depinde de ceilalți membri.

Exemplul 1. Să se decidă prin raționamente bazate pe regulile indicate asupra expresiei $(p \rightarrow (p + q)) \vee \bar{p}$.

Se observă că dacă presupunem că p este fals, $\bar{p}$ va fi adevărat (conform cu definiția negației) și deci toată disjuncția va fi adevărată.

Dacă însă p este adevărat atunci $\bar{p}$ va fi fals și deci conf. cu R_4 valoarea va depinde de celălalt membru.

Vedem deci ce se întîmplă în continuare cu celălalt membru atunci cînd raționăm mai departe în virtutea lui p este adevărat. Dacă p este adevărat $p \rightarrow (p + q)$ va depinde conform cu R_8 de $p + q$. Deoarece p este adevărat, excluderea va depinde de q. Presupunem în continuare că q este adevărat, atunci excluderea va fi falsă (deoarece p a fost deja presupus ca adevărat), implicația va fi falsă (R_8), iar disjuncția va fi falsă (ambii membri sînt falși). Dacă q va fi fals, $p + q$ va fi adevărat, implicația adevărată, și disjuncția adevărată. Prin urmare, deoarece disjuncția este numai într-un caz adevărată, ea nu reprezintă o lege logică (nici o contradicție), ci o funcție realizabilă.

Procesul de mai sus poate fi prezentat mai pe scurt dacă vom proceda întrucîtva analog cu modul în care se rezolvă ecuațiile în algebră punînd constantele în locul variabilelor și aplicînd „regulile de operație".

În acest scop este chiar mai comod să utilizăm pentru constantele *v*, *f* semnele cifrice 1, 0. Mai mult, ele ne vor ajuta să utilizăm și alte analogii cu algebra.

Convenție. 1 ≡ v, 0 ≡ f. (Adică 1 va desemna adevărul, iar 0 va desemna falsul). Toate tabelele vor putea fi refăcute acum conform cu această convenție. De exemplu,

p	$\bar{p}$
v	f
f	v

devine

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

Prin această convenție nu se transformă logica în aritmetică binară ci se obțin avantaje în mînuirea limbajului și în introducerea unor procedee de lucru ce țin de exprimarea cifrică.

Notînd apoi expresiile logice cu A, B, C, ... putem da ş o formulare mai concisă regulilor de mai sus, substituindu-l un şir de echivalenţe.

$R_1)\ A \cdot 0 = 0,\ R_2)\ A \cdot 1 = A,\ R_3)\ A \vee 1 = 1,\ R_4)\ A \vee 0 = A$

$R_5)\ A \to 1 = 1,\ R_6)\ 0 \to A = 1,\ R_7)\ A \to 0 = \bar{A}$

$R_8)\ 1 \to A = A;\ R_9)\ 0/A = 1,\ R_{10})\ 1/A = \bar{A},\ R_{11})\ 1 \swarrow A = 0$

$R_{12})\ 0 \swarrow A = \bar{A},\ R_{13})\ 1 + A = \bar{A},\ 0 + A = A,\ R_{14})\ (1 = A) = A,\ (0 = A) = \bar{A}.$

Revenim asupra exemplului 1.

Sup. $p = 0$. Concluzii $\bar{p} = 1$ şi $(p \to (p + q)) \vee \bar{p} = 1$

Sup. $p = 1$. Concluzie $\bar{p} = 0$. Disjuncţia va depinde de celălalt membru. Continuăm deci raţionamentul asupra acestuia, punînd valoarea cunoscută în locul variabilei p, $(1 \to (1 + q)$. Valoarea implicaţiei depinde de $1 + q$, iar $1 + q$ de ipotezele în legătură cu q. Sup. $q = 1$. Concl. $1 + q = 0$; $1 \to 0 = 0$, disjuncţia va fi 0. Sup. $q = 0$. Concl. $1 + q = 1$; $1 \to 1 = 1$, disjuncţia va fi 1. O nouă prescurtare se poate obţine dacă aşezăm ipotezele (supoziţiile) şi concluziile una după alta fără comentariu dezvoltat.

Sup. $p = 0$.
Concl. $\bar{p} = 1$ şi $p \to (p + q) \vee 1 = 1$
Sup. $p = 1$.
Concl. $\bar{p} = 0$; $(1 \to (1 + q)) \vee 0 = (1 + q) \vee 0 = 1 + q$
Sup. $q = 1$.
Concl. $(1 \to (1 + 1)) \vee 0 = (1 \to 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0$
Sup. $q = 0$.
Concl. $(1 \to (1 + 0)) \vee 0 = (1 \to 1) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$.

Prin urmare, deşi adevărată, într-un caz, expresia noastră nu e adevărată în toate.

Exemplul 2. Să se decidă asupra expresiei $\overline{\bar{p} \vee (q \cdot r)} \to p$

Sup. $p = 1$. Conf. cu R_5 expresia este adev.

Sup. $p = 0$. Aplică $R_7 \cdot \overline{\bar{0} \vee (q \cdot r)} \to 0 = \overline{1 \vee (q \cdot r)} \to 0 = \bar{1} \to 0 = 0 \to 0 = 1$.

Este deci suficient să facem ipoteze asupra lui p pentru a elimina toate necunoscutele şi a decide. Expresia este o lege logică.

Exemplul 3. Să se decidă asupra expresiei $(p \cdot q) \rightarrow \overline{r \vee s}$.

Sup. $p = 0$.

Concl. $(0 \cdot q) \rightarrow \overline{r \vee s} = 0 \rightarrow \overline{r \vee s} = 1$.

Sup. $p = 1$.

Concl. $(1 \cdot q) \rightarrow \overline{r \vee s} = q \rightarrow \overline{r \vee s}$.

Mai departe trebuie să facem noi supoziţii în vederea eliminării necunoscutelor.

Sup. $q = 0$. Concl. $0 \rightarrow \overline{r \vee s} = 1$

Sup. $q = 1$ Concl. $1 \rightarrow \overline{r \vee s} = \overline{r \vee s}$

Avem din nou nevoie de supoziţii.

Sup. $r = 1$. Concl. $1 \rightarrow \overline{1 \vee s} = 1 \rightarrow \bar{1} = 1 \rightarrow 0 = 0$.

Sup. $r = 0$. Concl. $1 \rightarrow \overline{0 \vee s} = 1 \rightarrow \bar{s}$. Din nou supoziţii, pentru s.

Sup. $s = 1$. Concl. $1 \rightarrow \bar{1} = 1 \rightarrow 0 = 0$

Sup. $s = 0$. Concl. $1 \rightarrow \bar{0} = 1 \rightarrow 1 = 1$.

Deoarece rezultatul eliminării lui p este într-un caz 1, iar rezultatele restului eliminărilor este o dată 0 şi o dată 1, avem de a face cu o funcţie realizabilă.

b. **Metoda matricelor.** O metodă foarte simplă de rezolvare este metoda matricelor. Ca şi în cazul matricelor unei funcţii se aşază în stînga tabelului sus argumentele (p, q, r, . . .), se descompune expresia în expresiile componente din ce în ce mai simple pînă se ajunge la variabile, se aşază în dreapta expresiile în ordinea complexităţii crescînde şi se decide asupra lor pe rînd în funcţie de datele anterioare pînă ce se obţine soluţia expresiei date.

Exemplu 1. Să se decidă asupra expresiilor.

a) $p \rightarrow (q \cdot p)$

b) $(\bar{p} \vee q) \rightarrow q$

c) $(p \cdot q) \rightarrow ((p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$

d) $(p \vee q) = \overline{p \vee q}$

a)

pq	$q \cdot p$	$p \to (q \cdot p)$
11	1	1
10	0	0
01	0	1
00	0	1

b)

pq	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$(\bar{p} \vee q) \to q$
11	0	1	1
10	0	0	1
01	1	1	1
00	1	1	0

c)

pq	$\bar{q}$	$p \cdot q$	$p \cdot \bar{q}$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$	$(p \cdot q) \to ((p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}))$
11	0	1	0	1	1
10	1	0	1	1	1
01	0	0	0	0	1
00	1	0	0	0	1

d)

pq	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$p \vee q = \overline{p \vee q}$
11	1	0	0
10	1	0	0
01	1	0	0
00	0	1	0

Prin urmare, a) şi b) sînt funcţii realizabile, c) este o funcţie identic-adevărată (lege logică), iar d) este o contradicţie. Deşi foarte simplu, procedeul matricelor devine practic inutilizabil pentru mai mult de trei variabile.

Exemplul 2.

a) $((\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee r)) \to (p \to r)$

b) $p \cdot (p \vee q) = \overline{p \vee (p \cdot r)}$

pqr	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee q$	$\bar{q} \vee r$	$p \to r$	$(\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee r)$	$((\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee r)) \to (p \to r)$
111	0	0	1	1	1	1	1
110	0	0	1	0	0	0	[illegible]
101	0	1	0	1	1	0	1
100	0	1	0	1	0	0	1
011	1	0	1	1	1	1	1
010	1	0	1	0	1	0	1
001	1	1	1	1	1	1	1
000	1	1	1	1	1	1	1

pqr	$p \vee q$	$p \cdot r$	$p \vee (p \cdot q)$	$\overline{p \vee (p \cdot r)}$	$p \cdot (p \vee q) = \overline{p \vee (p \cdot r)}$
111	1	1	1	0	0
110	1	0	1	0	0
101	1	1	1	0	0
100	1	0	1	0	0
011	1	0	0	1	0
010	1	0	0	1	0
001	0	0	0	1	0
000	0	0	0	1	0

Prin urmare funcţia a) este o lege logică, iar funcţia b) este contradicţie.

c. **Metoda formelor normale.** Pe baza relaţiei de echivalenţă logică între anumite expresii noi putem efectua operaţii de transformare echivalentă în virtutea unor reguli logice. Trecerea de la o expresie logică la alta echivalentă cu ea în virtutea anumitor reguli logice ne dă posibilitatea să decidem asupra unor expresii pe baza altora. Pe de altă parte, despre valoarea unei funcţii putem decide în anumite cazuri dacă ţinem seama dc o serie de corelaţii între anumite proprietăţi structurale („sintactice") şi cele de valoare („semantice").

În general vorbind, din anumite proprietăţi structurale ale unei expresii noi putem conchide la alte proprietăţi. Se impune, desigur, ca proprietatea dată să fie univoc reprezentată de o proprietate structurală a expresiei.

Asemenea expresii care au anumite proprietăţi structurale din care noi putem conchide existenţa altor proprietăţi pentru expresia dată şi pentru orice altă expresie echivalentă cu ea se numesc expresii „canonice" sau „normale". Dacă în aritmetică se cere ca din şirul de fracţii $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24} =$ să se aleagă fracţia care va reprezenta univoc pe oricare din mulţimea fracţiilor considerate atunci noi va trebui să găsim o asemenea fracţie care are anumite proprietăţi ce nu mai aparţin altei fracţii din mulţimea considerată. O astfel de fracţie este aceea care are proprietatea de a fi „ireductibilă", în cazul nostru $\frac{1}{3}$. Prin urmare, dacă o fracţie $\frac{a}{b}$ este ireductibilă, noi putem spune că ea reprezintă univoc toate fracţiile din mulţimea considerată.

În logică există expresii de o structură tip la care pot fi reduse prin transformări echivalente alte expresii şi care datorită însuşirilor lor structurale ne ajută să decidem asupra valorilor şi a tuturor expresiilor echivalente cu ele. Aceste expresii poartă numele de „forme normale". Formele normale se construiesc în funcţie de clasa operatorilor de bază. Noi vom considera formele normale în „algebra Boole", adică cele construite cu operatorii (—, •, ∨). În funcţie de operatorul principal (care dă denumirea funcţiei) avem două forme normale: *forma normală conjunctivă* şi *forma normală disjunctivă.*

Definiţii

(1) Numim *termeni primi* variabilele şi negaţiile lor (p, q, r, . . ., $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, . . .).

(2) Numim *conjuncţie primă* orice termen prim şi orice conjuncţie de termeni primi (ex. p, $\bar{q}$, $p \cdot q$, $\bar{p} \cdot q$.)

(3) Numim *disjuncţie primă* orice termen prim şi orice disjuncţie de termeni primi (ex. p, $\bar{q}$, $p \vee q$, $p \vee \bar{q}$, . . .)

Din aceste definiţii decurg unele concluzii importante cu privire la conjuncţii şi disjuncţii: a) se admite şi cazul cînd avem conjuncţii (resp. disjuncţii) cu un singur membru, b) în anumite cazuri una şi aceeaşi expresie poate fi tratată ca membru al unei conjuncţii cu un singur membru sau ca membru al unei disjuncţii cu un singur membru. Se poate de asemenea vorbi de conjuncţii şi disjuncţii cu o mulţime vidă de argumente. Conjuncţiile (resp. disjuncţiile) cu un singur membru pot fi tratate ca avînd restul membrilor vizi.

(5) Numim *formă normală conjunctivă* conjuncţia oricărei mulţimi de disjuncţii prime.

(6) Numim *formă normală disjunctivă* disjuncţia oricărei mulţimi de conjuncţii prime. Cazuri interesante. Termenii primi vor fi atît forme normale conjunctive cît şi forme normale disjunctive, la fel conjuncţiile prime şi disjuncţiile prime. De exemplu, p, q, r, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, şi resp. $p \cdot q$, $p \vee q$, $\bar{p} \vee q$, $\bar{p} \cdot q$, . . .

Cînd în calcul se introduc şi constantele 1 (adevărat) şi 0 (fals) noţiunea de formă normală se generalizează şi în raport cu aceasta*. În funcţie de un alt limbaj formele normale pot primi şi alte definiţii.

* Vezi lucrarea noastră „Introducere în logica matematică" (p. 56—57, 60—61).

d. **Proprietăți ale formelor normale.** O proprietate generală a formelor normale constă în aceea că negația cade numai pe variabile. O altă proprietate constă în aceea că operatorul care dă denumirea formei normale (conjuncția, respectiv disjuncția) nu apare în membrii expresiei. Prin definiție, se înțelege că în formele normale nu apar alți operatori decît $\cdot$, $\vee$, $-$.

Expresiile $\bar{p} \vee q$, $(p \cdot q) \vee r$, $\bar{p} \vee (q \cdot \bar{r})$, $p \cdot (q \vee \bar{p})$ sînt forme normale, dar expresiile $p \rightarrow q$, $\overline{p \cdot q}$, $p \overline{\vee} \bar{q}$, $p \cdot (q \cdot \bar{p})$, $p \vee (q \vee r)$ nu sînt forme normale, deoarece nu satisfac proprietățile de mai sus și, se înțelege, nici definițiile date.

Deoarece orice expresie poate fi transformată, pe baza anumitor reguli, în expresie de formă normală echivalentă cu ea, o dată ce am decis asupra valorii formei normale am decis și cu privire la orice altă expresie echivalentă ei.

(7) Clasa tuturor expresiilor echivalente cu o expresie dată poartă numele de „clasă de echivalență".

De aci decurge că a decide asupra formei normale înseamnă a decide asupra clasei ei de echivalente.

e. **Cum se decide cu ajutorul formelor normale?** Mai întîi stabilim două corelații inițiale între proprietăți structurale și valoarea logică.

a) Expresia de forma $A \vee \bar{A}$ este totdeauna adevărată (lege logică).

b) Expresia de forma $A \cdot \bar{A}$ este totdeauna falsă (contradicție).

Aceste două propoziții pot fi demonstrate pe baza matricelor.

Prin urmare, putem scrie $A \vee \bar{A} = 1$ și $A \cdot \bar{A} = 0$. Pe de altă parte, $A \vee \bar{A}$ poate face parte dintr-un membru disjunctiv (membru al unei conjuncții) iar $A \cdot \bar{A}$ parte dintr-un membru conjunctiv (membru al unei disjuncții). Fie $\alpha \vee A \vee \bar{A}$ o disjuncție unde α reprezintă restul membrilor. Conform cu $A \vee \bar{A} = 1$ și cu echivalența $A \vee 1 = 1$, vom avea $\alpha \vee A \vee \bar{A} = \alpha \vee 1 = 1$.

Fie $\alpha \cdot A \cdot \bar{A}$ o conjuncție unde α reprezintă restul membrilor. Conform cu $A \cdot \bar{A} = 0$ și cu echivalența $A \cdot 0 = 0$, vom

avea $\alpha \cdot A \cdot \bar{A} = \alpha \cdot 0 = 0$. De aci se deduce că dacă o conjuncţie este formată numai din membri de forma $\alpha \vee A \vee \bar{A}$ fiecare membru al ei va fi adevărat şi deci toată conjuncţia va fi adevărată şi dacă o disjuncţie este formată numai din membri de forma $\alpha \cdot A \cdot \bar{A}$ fiecare membru al ei va fi fals şi deci toată disjuncţia va fi falsă (se presupune că în ambele cazuri α poate fi şi vid). De aci decurg următoarele criterii (în fond, teoreme) de decizie în formele normale:

1. Dacă în fiecare membru al formei normale conjunctive este conţinută o expresie de forma $A \vee \bar{A}$ atunci forma normală reprezintă o funcţie identic-adevărată (lege logică, tautologie).

2. Dacă în fiecare membru al formei normale disjunctive este conţinută o expresie de forma $A \cdot \bar{A}$ atunci forma normală reprezintă o funcţie identic-falsă (irealizabilă, contradicţie).

3. Oricare expresie din clasa de expresii echivalente cu forma normală respectivă va avea aceeaşi valoare ca şi forma normală.

4. Pentru a decide asupra valorii unei expresii este suficient s-o aducem la forma normală, dacă nu are loc nici cazul 1, nici 2, atunci avem o funcţie realizabilă.

f. Cum se aduce la forma normală o expresie?

a) Dacă există operatori care nu trebuie să apară în forma normală îi eliminăm conform cu definiţiile date mai sus. Ex. în loc de $A \rightarrow B$ vom pune $\bar{A} \vee B$, în loc de A/B vom pune $\overline{A \cdot B}$ etc.

b) Dacă negaţia nu cade pe variabile o coborîm conform cu regulile:

(b_1) $\bar{\bar{A}}$ se înlocuieşte cu A,

(b_2) $\overline{A \cdot B}$ se înlocuieşte cu $\bar{A} \vee \bar{B}$

(b_3) $\overline{A \vee B}$ se înlocuieşte cu $\bar{A} \cdot \bar{B}$

(adică conform cu legea dublei negaţii şi aşa-numitele legi ale lui de Morgan).

(c) După efectuarea operaţiilor conform cu (a) şi (b) aducem expresia la forma normală dorită pe baza regulilor de asociativitate şi distribuitivitate. Ordonarea membrilor se poate face pe baza comunicativităţii.

Exemple. Să se aducă la forma normală expresiile (a) $((p \to q) \cdot (q \to r)) \to (p \to r)$, (b) $\overline{p \to (q \to p)}$, (c) $(p \cdot q) = p$, (d) $(p/q) \cdot (q/p)$. Rezolvăm prima expresie.

(a) $((p \to q) \cdot (q \to r)) \to (p \to r)$

Trebuie să eliminăm operatorul implicației.

$$\overline{((\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee p))} \vee (\bar{p} \vee r)$$

Coborîm negația pe variabile conform cu regulile (b$_1$)—(b$_3$).

$$(\overline{\bar{p} \vee q}) \vee (\overline{\bar{q} \vee p}) \vee \bar{p} \vee r$$

$$(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{\bar{q}} \cdot \bar{p}) \vee \bar{p} \vee r$$

$$(p \cdot \bar{q}) \vee (q \cdot \bar{p}) \vee \bar{p} \vee r$$

Se observă că aceasta este o f.n. disjunctivă. Conform cu criteriul de decizie ea nu reprezintă o contradicție și deci expresia inițială (echivalentă cu ea) nu exprimă o contradicție.

Pentru a ajunge la f.n. conjunctivă trebuie să distribuim de cîteva ori disjuncția față de conjuncție.

Putem pentru simplificare să scriem expresia fără semnul disjuncției $(p \cdot \bar{q})(q \cdot \bar{p})\bar{p}r$.

Distribuția o putem începe cu partea $(q \cdot \bar{p})\bar{p}r$, adică vom distribui $\bar{p}r$ față de $q \cdot \bar{p}$ și vom obține $(p \cdot \bar{q})(\bar{p}rq \cdot \bar{p}r\bar{p})$.

Distribuim apoi $(p \cdot \bar{q})$ față de $\bar{p}rq \cdot \bar{p}r\bar{p}$ și obținem

$$((p \cdot \bar{q})\bar{p}rq) \cdot ((p \cdot \bar{q})\bar{p}r\bar{p})$$

Distribuim în continuare $\bar{p}rq$ față de $p \cdot \bar{q}$, și pe $\bar{p}r\bar{p}$ față de $p \cdot \bar{q}$, obținem: $\bar{p}rqp \cdot \bar{p}rq\bar{q} \cdot \bar{p}r\bar{p}p \cdot \bar{p}r\bar{p}\bar{q}$, ceea ce este f.n.c. Se vede că în fiecare membru este conținută o expresie de forma $A \vee \bar{A}$, adică în primul $p \vee \bar{p}$, în al doilea $q \vee \bar{q}$, în al treilea $p \vee \bar{p}$, în al patrulea $p \vee \bar{p}$. Prin urmare, avem o lege logică, iar expresia (a) este și ea o lege logică.

În continuare vom pune formulele una sub alta fără a indica operațiile.

(b)	$\overline{p \to (q \to p)}$	$p \cdot (\bar{\bar{q}} \cdot \bar{p})$
	$\overline{\bar{p} \vee (\bar{q} \vee p)}$	$p \cdot (q \cdot \bar{p})$
	$\bar{\bar{p}} \cdot (\overline{\bar{q} \vee p})$	$p \cdot q \cdot \bar{p}$

Ultima expresie $p \cdot q \cdot \bar{p}$ poate fi tratată atît ca formă normală conjunctivă cu membrii p, q, $\bar{p}$ cît și ca formă normală disjunctivă cu un singur membru $(p \cdot q \cdot \bar{p})$. În această ultimă calitate se vede că ea conține în unicul membru o expresie de forma $A \cdot \bar{A}$ (adică aci $p \cdot \bar{p}$.) ceea ce înseamnă că reprezintă o contradicție și deci că (b) este o contradicție.

(c) $(p \cdot q) = p$

$((p \cdot q) \rightarrow p) \cdot (p \rightarrow (p \cdot q))$ (descompunerea echivalenței în implicații)

$$(\overline{p \cdot q} \vee p) \cdot (\bar{p} \vee (p \cdot q))$$

$$(\bar{p} \vee \bar{q} \vee p) \cdot (\bar{p} \vee (p \cdot q))$$

$$\bar{p}\bar{q}p \cdot \bar{p}p \cdot \bar{p}q$$

Aceasta este o f.n.c. Funcția reprezentată nu este lege logică.

Vrem să vedem dacă este contradicție, deci o aducem la f.n.d. Reintroducem semnul disjuncției.

$$(\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)(\bar{p} \vee p)(\bar{p} \vee q)$$

$$(\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)((\bar{p} \vee q)\bar{p} \vee (\bar{p} \vee q)p)$$

$$(\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)(\bar{p}\bar{p} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}p \vee pq)$$

$$(\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)\bar{p}\bar{p} \vee (\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)\bar{p}q \vee (\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)\bar{p}p \vee (\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)\, pq$$

$$\bar{p}\bar{p}\bar{p} \vee \bar{p}\bar{p}\bar{q} \vee \bar{p}\bar{p}p \vee \bar{p}q\bar{p} \vee \bar{p}q\bar{q} \vee \bar{p}qp \vee \bar{p}p\bar{p} \vee \bar{p}p\bar{q} \vee \bar{p}pp \vee pq\bar{p} \vee$$

$$\vee\, pq\bar{q} \vee pqp.$$

Se observă că nu exprimă o contradicție. De remarcat este că în această formulă o serie de membri se repetă. Conform cu legea $A \vee A = A$ (idempotența) noi îi putem reduce fără a influența nici valoarea expresiei, nici procesul de decizie.

(d)

$$p/q \cdot q/p \quad \Big| \quad ((\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{q} \vee \bar{p}) \quad \Big| \quad ((\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot \bar{q}) \vee ((\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot \bar{p}))$$

$$\overline{p \cdot q} \cdot \overline{q \cdot p} \quad \Big| \quad \bar{p}\bar{q} \cdot \bar{q}\bar{p} \text{ (f.n.c.)} \quad \Big| \quad \bar{p}\bar{q} \vee \bar{q}\bar{q} \vee \bar{p}\bar{p} \vee \bar{q}\bar{p} \quad \text{(f.n.d.)}$$

Ca și expresia (c) expresia (d) este o funcție simplu realizabilă.

4. LISTA PRINCIPALELOR LEGI LOGICE

O dată ce am expus procedeele de decizie cititorul poate face cunoştinţă cu lista celor mai importante legi logice.

Într-un paragraf anterior a fost dat deja un grup de legi logice (1)—(23) unele referitoare la anumite proprietăţi ale funcţiilor, altele referitoare la echivalenţa funcţiilor (definirea unor operatori prin alţii).

(24) $p \cdot (p \vee q) \equiv p$ (25) $p \vee (p \cdot q) \equiv p$ (legile absorbţiei)

De exemplu, valoarea propoziţiei „ba plînge, ba plînge sau se vaită" se reduce la valoarea propoziţiei „plînge" (se consideră că avem o persoană bine determinată la care ne raportăm), la fel pentru „ba dansează, ba dansează ori cîntă" valoarea se reduce la valoarea afirmaţiei „dansează". Analog pentru (25) „Cîntă sau cîntă şi dansează", „Huliganul înjură sau înjură şi se bate".

(26) $\bar{\bar{p}} \rightarrow p$ (27) $\bar{\bar{p}} = p$ (legile dublei negaţii).

De exemplu, „Nu este adevărat că «2 nu diferă de 4»", prin urmare, 2 diferă de 4" (pentru 26) şi „3 $>$ 2 dacă şi numai dacă nu este adevărat că 3 $\not>$ 2".

(28) $\overline{p \cdot q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ (29) $\overline{p \vee q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$ (legile lui de Morgan).
„Nu-i adevărat că ninge şi plouă" ceea ce înseamnă că „nu ninge sau nu plouă".

„Nu-i adevărat că un huligan vorbeşte frumos sau este paşnic" ceea ce înseamnă că „un huligan nici nu vorbeşte frumos şi nici nu este paşnic".

(30) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (31) $\bar{p} \rightarrow (p \rightarrow q)$. Acestea sînt legi ale implicaţiei materiale care spun că adevărul decurge din orice (30) şi respectiv că falsul implică orice (31), ca în cazurile:

„Dacă toţi oamenii sînt fiinţe raţionale, atunci cel puţin unele fiinţe raţionale sînt oameni (adevărul decurge din adevăr).

„Dacă toţi oamenii sînt octogenari, atunci cel puţin unii octogenari sînt oameni", (adevărul decurge din fals, adică
l implică adevărul).

„Dacă nici o pasăre nu este animal, atunci nici un animal nu este pasăre" (falsul implică falsul)

(32) $(p \rightarrow \bar{p}) \rightarrow \bar{p}$ (33) $((p \rightarrow q) \cdot (p \rightarrow \bar{q}) \rightarrow \bar{p}$ (legile reducerii la absurd).

„Nici o propoziţie nu este adevărată" implică faptul c nici propoziţia „Nici o propoziţie nu este adevărată" nu est adevărată, prin urmare, Nu este adevărat că „nici o propc ziţie nu este adevărată" (exemplu pentru (32)).

„Triunghiul echilateral are un unghi drept". De aci decurg că „nu toate laturile sînt egale" (căci la unghiuri inegale s opun laturi inegale), iar din faptul că este echilateral decurg (prin definiţie) că „toate laturile sînt egale". Prin urmare nu este adevărat că „triunghiul echilateral are un ungh drept".

(34) $(p \cdot q) \rightarrow p$ (resp. $(p \cdot q) \rightarrow q$) (35) $p \rightarrow (p \vee q)$ (resp $q \rightarrow (p \vee q)$).

Legea (34) spune că conjuncţia implică partea sa, sau că dacă este adevărată conjuncţia atunci este adevărat şi un membru oarecare al ei, iar legea (39) spune că disjuncţia este implicată de partea sa, sau că, dacă este adevărat un membru oarecare al disjuncţiei atunci este adevărată disjuncţia.

(36) $((p \rightarrow q) \cdot p) \rightarrow q$ (legea modus ponens)

Dacă este adevărat că $p \rightarrow q$ şi dacă este adevărat p atunci este adevărat q.

(37) $\overline{p \cdot \bar{p}}$ (legea noncontradicţiei)

Nu este adevărat că p şi non-p.

(38) $p \vee \bar{p}$ (legea terţului exclus)

Este adevărat p sau este adevărat non-p (or, p este adevărat sau p este fals).

(39) $pq \vee p\bar{q} \equiv p$ (40) $pq \cdot p\bar{q} \equiv p$ (legile excluderii).

„Plouă şi stau în casă sau plouă şi nu stau în casă" este echivalentă cu „plouă".

„Plouă sau e vreme friguroasă şi plouă sau nu e vreme friguroasă" este echivalentă cu „plouă".

Exerciţii. Să se substituie în fiecare lege alţi operatori decît cei ce apar în legea respectivă şi să se verifice dacă ceea ce se obţine este sau nu lege logică.

Exemplu pentru $p \cdot q = q \cdot p$ să punem în locul conjuncţiei pe rînd $\rightarrow$, $=$, $/$, $\swarrow$, $+$ şi să se decidă dacă aceştia au proprietatea comutativităţii. Astfel:

$$p + q = q + p$$
$$p \rightarrow q = q \rightarrow p$$
$$p/q = q/p \text{ etc.}$$

a. În vederea rezolvării altor probleme cum ar fi problema dacă două expresii date sînt sau nu echivalente, problema ipotezelor şi concluziilor, precum şi problema minimizării este util să introducem un nou tip de formă normală, aşa zisele „forme normale perfecte".

Definiţie. Numim formă normală perfectă aceea formă normală care pe lîngă condiţiile descrise anterior satisface încă următoarele proprietăţi:

a) fiecare membru al formei normale conţine pe fiecare din literele care intră în componenţa expresiei (cu sau fără negaţie);

b) nici un termen prim nu poate apărea mai mult de o singură dată într-un singur membru;

c) nici un membru nu poate apărea mai mult de o dată;

d) nici o literă nu poate intra într-un membru împreună cu negaţia ei.

Exemple. Expresia $(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q})$ este o formă normală conjunctivă perfect (f.n.c.p.), iar expresia $(p \cdot q) \vee (\bar{q} \cdot p)$ este o formă normală disjunctivă perfectă. Funcţia $(p \vee q) \cdot r$ nu este în f.n.c.p. deoarece nu satisface condiţia a). Expresia $ppqr \vee prq$ satisface condiţia a) dar nu satisface condiţia b) deoarece p se repetă în primul membru. Expresia $pqr \cdot p\bar{q}r \cdot pqr$ satisface condiţiile a) şi b) dar nu pe c). Expresia $pr\bar{r} \cdot pqr$ satisface condiţiile a)—c) dar nu satisface condiţia d).

Convenţie. Pentru a face mai comodă analiza formei normale convenim ca în membrii ei să scriem literele în ordine alfabetică. Pentru a aduce o expresie la forma normală perfectă procedăm astfel:

a) aducem expresia la una sau alta din cele două forme normale (neperfecte) generale;

b) dacă într-un membru lipseşte o literă atunci ea se adaugă conform cu expresiile:

$$\alpha \vee (t \cdot \bar{t}) \text{ (pentru f.n.c.) şi}$$

$$\alpha \cdot (t \vee \bar{t}) \text{ (pentru f.n.d.)}$$

unde α este membru respectiv, iar t litera ce trebuie adăugată; după aceea se operează distribuţiile,

c) dacă un termen apare mai mult de o dată el este redu conform cu regulile

$$A \cdot A \cdot \quad \cdot A \text{ se înlocuieşte cu } A$$

$$A \vee A \vee \quad \vee A \text{ se înlocuieşte cu } A$$

d) dacă un membru apare mai mult de o dată, atunci e este redus conform cu aceleaşi reguli de mai sus (aci A va reprezenta nu un termen ci un membru),

e) dacă o literă apare împreună cu negaţia ei într-un membru atunci tot membrul este eliminat.

Cum justificăm introducerea sau eliminarea unei expresii? Este permis să se adauge la o expresie dată o altă expresie dacă noua expresie obţinută în urma operaţiilor amintite (introducere, eliminare) nu este diferită ca valoare de cea iniţială. Într-adevăr, adăugînd la expresia α expresia $(t \cdot \bar{t})$ prin disjuncţie, deci $\alpha \vee (t \cdot \bar{t})$ valoarea expresiei nu se schimbă, ceea ce se dovedeşte prin demonstrarea tezei corespunzătoare:

$$A \vee (B \cdot \bar{B}) = A$$

Se ştie că $B \cdot \bar{B} = 0$ şi că $A \vee 0 = A$.

Analog pentru $\alpha \cdot (t \vee \bar{t})$ se ştie că $B \vee \bar{B} = 1$, şi $A \cdot 1 = A$.

b. **Exerciţii de normalizare perfectă.** În exemplele pe care le vom considera expresiile vor fi aduse deja la formele normale (generale).

a) $(p \cdot q) \vee (q \cdot r) \vee p$. Pornind de la definiţia f.n.p. urmărim rînd pe rînd dacă condiţiile sînt satisfăcute. În caz că nu, noi le realizăm conform cu regulile a)—e) de mai sus.

În expresia a) condiţia primă nu este satisfăcută deoarece în membrul $(p \cdot q)$ lipseşte litera r, în membrul $(q \cdot r)$ lipseşte litera p, iar în membrul p lipseşte atît q cît şi r. Adăugăm pe rînd literele care lipsesc după regula respectivă:

$$((p \cdot q) \cdot (r \vee \bar{r})) \vee ((q \cdot r) \cdot (p \vee \bar{p})) \vee (p \cdot (q \vee \bar{q})$$

Prin distribuţie readucem expresia la forma normală:

$$pqr \vee pq\bar{r} \vee qrp \vee qr\bar{p} \vee pq \vee p\bar{q}$$

Deoarece în ultimii doi membri lipsește litera r o vom adăuga:

$$pqr \vee pq\bar{r} \vee qrp \vee qr\bar{p} \vee pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}.$$

(Procesul poate fi înfăptuit în minte fără a mai scrie toate etapele).

Ordonăm literele alfabetic:

$pqr \vee pq\bar{r} \vee pqr \vee \bar{p}qr \vee pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}$. Se observă că membrii pqr și $pq\bar{r}$ se repetă, prin urmare îi vom reduce:

$pqr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}$ ceea ce este f.n.d.p.

b) Să se normalizeze perfect $(p \vee r) \cdot q$.

$$((p \vee r) \vee (q \cdot \bar{q})) \cdot ((q \vee (p \cdot \bar{p})) \vee (r \cdot \bar{r}))$$

$$prq \cdot pr\bar{q} \cdot ((qp \cdot q\bar{p})(r \cdot \bar{r}))$$

$$pqr \cdot p\bar{q}r \cdot pqr \cdot pq\bar{r} \cdot \bar{p}qr \cdot \bar{p}q\bar{r}$$

$pqr \cdot p\bar{q}r \cdot pq\bar{r} \cdot \bar{p}qr \cdot \bar{p}q\bar{r}$, ceea ce este f.n.c.p.

c) Să se verifice dacă expresiile $(p \cdot q) \rightarrow (q \cdot r)$ și $(p \rightarrow \bar{q}) \vee (q \cdot r)$ sînt echivalente. Considerăm prima expresie pe care o aducem la f.n. (să zicem, conjunctivă). Avem secvența

$(p \cdot q) \rightarrow (q \cdot r)$

$\overline{p \cdot q} \vee (q \cdot r)$

$\bar{p} \vee \bar{q} \vee (q \cdot r)$

$\bar{p}\bar{q}q \cdot \bar{p}\bar{q}r$

Membrul $\bar{p}\bar{q}q$ dispare deoarece conține. $q\bar{q}$

Deci $\bar{p}\bar{q}r$ este f.n.c.p.

Aducem și a doua expresie la aceeași f.n.

$$(p \rightarrow \bar{q}) \vee (q \cdot r)$$

$$(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (q \cdot r)$$

$$\bar{p}\bar{q}q \cdot \bar{p}\bar{q}r$$

$$\bar{p}\bar{q}r \quad \text{f.n.c.p.}$$

Deoarece f.n.c.p. a primei funcții este identică cu f.n.c.p. a celei de a doua, vom spune că ele sînt echivalente.

d) Să se normalizeze perfect expresia $p \to (q \to p)$

$p \to (q \to p)$	O aducem la f.n.d.p. pornind de la f.n.d.
$\bar{p} \vee (\bar{q} \vee p)$	$(\bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})) \vee (\bar{q} \cdot (p \vee \bar{p})) \vee (p \cdot (q \vee \bar{q}))$
$\bar{p} \vee \bar{q} \vee p$	$\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee p\bar{q} \vee \bar{p}\bar{q} \vee pq \vee p\bar{q}$
$p\bar{p}\bar{q}$ f.n.c.	$\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee p\bar{q} \vee pq$ f.n.d.p.

În ceea ce priveşte f.n.c. pentru a o face perfectă trebuie să eliminăm unicul membru, şi deci toată forma, deoarece conţine $p\bar{p}$. De mai înainte ştim că expresia $p \to (q \to p)$ este o lege logică. Or, vedem că ea nu are f.n.c.p. (sau are una vidă).

Teoremă. Legile logice nu au formă normală conjunctivă perfectă (sau, ceea ce este acelaşi lucru, au o f.n.c.p. vidă). Demonstraţia este uşor de dat: deoarece în f.n.c. a unei legi logice se conţine o literă împreună cu negaţia ei (adică o expresie de forma $A \vee \bar{A}$) în fiecare membru, pentru a o aduce la f.n.c.p. trebuie tăiat fiecare astfel de membru şi deci întreaga formă este eliminată.

e) Să se normalizeze expresia $\overline{\bar{p} \to (p \to q)}$.

$\overline{\bar{p} \to (p \to q)}$ are ca f.n.d. $(\bar{p}p\bar{q})$, iar ca f.n.c. $\bar{p} \cdot p \cdot \bar{q}$. Prin normalizare perfectă unicul membru al f.n.d. $\bar{p}p\bar{q}$ dispare deoarece conţine $p\bar{p}$. Dimpotrivă forma n.c.p. va fi $\bar{p}q \cdot \bar{p}\bar{q} \cdot pq \cdot p\bar{q}$.

Expresia $\overline{\bar{p} \to (p \to q)}$ este negaţia unei legi logice, deci o contradicţie, ea nu are f.n.d.p.

Teoremă. Contradicţiile nu au f.n.d.p. (sau, ceea ce revine la acelaşi lucru, au o f.n.d.p. vidă).

c. **Procedeul matriceal de normalizare perfectă.** Să considerăm funcţia $((p \to q) \cdot (q \to r)) \to (p \to r)$ (adică legea tranzitivităţii implicaţiei sau „regula silogismului). O aducem la f.n.d.p. (singura reală). Convenim să scriem expresiile obţinute în mod continuu, legîndu-le cu ajutorul echivalenţei ($=$).

$$[((p \to q)\cdot(q \to r)) \to (p \to r) = \overline{(\bar{p} \vee q)\cdot(\bar{q} \vee r)} \vee \bar{p} \vee r) =$$

$$= \overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \overline{(\bar{q} \vee r)} \vee (\bar{p} \vee r) = (p\cdot\bar{q}) \vee (q\cdot\bar{r}) \vee (\bar{p} \vee r) =$$

$$= p\bar{q} \vee q\bar{r} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee rp \vee r\bar{p} = p\bar{q}(r \vee \bar{r}) \vee q\bar{r}(p \vee \bar{p}) \vee$$

$$\vee \bar{p}q(r \vee \bar{r}) \vee \bar{p}\bar{q}(r \vee \bar{r}) \vee rp(q \vee \bar{q}) \vee r\bar{p}(q \vee \bar{q}) =$$

$$= p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee q\bar{r}p \vee q\bar{r}\bar{p} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee$$

$$\vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee rpq \vee rp\bar{q} \vee r\bar{p}q \vee r\bar{p}\bar{q} = p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee$$

$$\vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pqr \vee$$

$$\vee p\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r = p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee$$

$$\bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pqr \quad \text{(f.n.d.p.)}.$$

Se observă că această formă normală are opt membri. Ordonăm într-o coloană acești membri (în stînga), iar în dreapta lor așezăm alegerile de valori pentru care iau valoarea adevărat.

pqr	111
$pq\bar{r}$	110
$p\bar{q}r$	101
$p\bar{q}\bar{r}$	100
$\bar{p}qr$	011
$\bar{p}q\bar{r}$	010
$\bar{p}\bar{q}r$	001
$\bar{p}\bar{q}\bar{r}$	000

Se observă corespondența biunivocă dintre cele două serii de semne: în fiecare grupă unei afirmații îi corespunde 1, iar unei negații 0 (ex. p — 1, $\bar{p}$ — 0), Numărul grupelor în fiecare coloană este de 2^n. Acesta este numărul de alegeri posibile cînd avem *n* argumente. Or, tautologia este adevărată pe 2^n alegeri de valori.

Procedeu. Avînd o funcție cu *n* variabile (diferite) constituim tabelul celor 2^n alegeri de valori posibile și aflăm valorile pe care le ia funcția în dependență de acestea. Separăm apoi alegerile de valori pentru care funcția ia valoarea adevăr și în locul fiecărei valori 1 punem litera care-i corespunde fără negație, iar în locul fiecărei valori 0 punem litera cu negație. În locul unei algeri de valori vom obține astfel o conjuncție de termeni primi. Conjuncțiile astfel obținute sînt legate disjunctiv, iar ceea ce se obține este f.n.d.p.

Exemplu. Fie alegerile pentru care se obține valoarea 1 următoarele: 100, 001, 010. Numărul de cifre arată cîte litere (puse în ordine alfabetică vom avea). Obținem corespondențele 100 — $p\bar{q}\bar{r}$

001 — $\bar{p}\bar{q}r$

010 — $\bar{p}q\bar{r}$

Prin urmare $p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}q\bar{r}$ este f.n.d.p.

Exercițiu. Să se normalizeze disjunctiv perfect prin matrice expresia $(p \vee q) \rightarrow r$.

Mai întîi decidem cu ajutorul matricei.

p q r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
1 1 1	1	1
1 1 0	1	0
1 0 1	1	1
1 0 0	1	0
0 1 1	1	1
0 1 0	1	0
0 0 1	0	1
0 0 0	0	1

Alegerile 111, 101, 011, 001, 000 dau pentru funcția respectivă valoarea 1. Le vom înlocui cu literele care le corespund: pqr, $p\bar{q}r$, $\bar{p}qr$, $\bar{p}\bar{q}r$, $\bar{p}\bar{q}\bar{r}$. Ca urmare avem f.n.d.p. $pqr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$. Vor fi atîția membri ai formei normale cîte valori de adevăr are funcția.

Un procedeu asemănător se aplică și f.n.c.p. Se formează matricea funcției după care se consideră alegerile de valori pentru care funcția devine falsă. În fiecare alegere se înlocuiește constanta 1 cu litera corespunzătoare negată, iar constanta 0 cu litera corespunzătoare fără negație.

Exemplu. Pentru alegerile 100, 101, 111 vom avea $\bar{p}qr$, $\bar{p}q\bar{r}$, $\bar{p}\bar{q}\bar{r}$.

Exerciţiu. Să se găsească f.n.c.p. a expresiei $(p \vee q) = r$.

$p\ q\ r$	$p \vee q$	$(p \vee q) = r$
1 1 1	1	1
1 1 0	1	0
1 0 1	1	1
1 0 0	1	0
0 1 1	1	1
0 1 0	1	0
0 0 1	0	0
0 0 0	0	1

Alegerile pentru care funcţia ia valoarea 0 sînt 110, 100, 010, 001. Prin urmare, f.n.c. perfectă va $\bar{p}\bar{q}r \cdot \bar{p}qr \cdot p\bar{q}r \cdot pq\bar{r}$. Se poate proceda şi altfel. Vom forma f.n.d.p. şi pentru cazurile cînd funcţia este falsă ca şi pentru cazurile cînd ea este adevărată (adică înlocuirile se vor face la fel), apoi vom forma negaţia acestei funcţii conform cu regula lui de Morgan.

Fie aceleaşi alegeri de mai sus pentru care funcţia are valoarea 0, adică 110, 100, 010, 001. Vom avea f.n.d.p. $pq\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r$. Dacă o negăm vom obţine prin regula lui de Morgan f.n.c.p. de mai sus:

$$\overline{pq\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r}$$

$$\overline{p \cdot q \cdot \bar{r}} \cdot \overline{p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}} \cdot \overline{\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}} \cdot \overline{\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r}$$

$$\bar{p}\bar{q}r \cdot \bar{p}qr \cdot p\bar{q}r \cdot pq\bar{r}$$

6. PRINCIPIUL DUALITĂŢII

Formulele construite cu ajutorul operatorilor $\cdot$, $\vee$ sînt dispuse simetric, adică dual în raport cu aceşti operatori. Dacă avem o formulă A construită cu operatorii —, $\cdot$, $\vee$ o altă formulă A^* obţinută din aceasta prin înlocuirea lui $\cdot$ cu $\vee$ şi a lui $\vee$ cu $\cdot$ va fi numită duala lui A. Ex. duala formulei $(p \cdot q) \vee r$ este formula $(p \vee q) \cdot r$.

Se formulează următoarele principii de dualitate.

(1) Dacă A este o tautologie (lege logică) $\overline{A^*}$ va fi de asemenea o tautologie.

(2) Dacă $A \to B$ este o tautologie $B^* \to A^*$ va fi de asemenea o tautologie.
(3) Dacă $A = B$ este o tautologie atunci $A^* = B^*$ este de asemenea o tautologie.

Fie $p \vee \bar{p}$ o tautologie, duala ei va fi $p \cdot \bar{p}$, iar negația ei, adică $\overline{p \cdot \bar{p}}$ este tautologie (conform cu (1)).

Fie $(p \cdot q) \to p$ o tautologie, duala lui $p \cdot q$ va fi $p \vee q$, iar a lui p însăși p. Ca urmare vom avea $p \to (p \vee q)$ (tautologie) (conform cu (2)). Fie $p \cdot q = q \cdot p$ o tautologie, $p \vee q = q \vee p$ este de asemenea o tautologie.

AVA, A&Ā

Exercițiu. Să se grupeze legile logice care satisfac principiile dualității. Să se arată ce alți operatori sînt duali.

7. AFLAREA IPOTEZELOR ȘI CONCLUZIILOR

Definiții. O funcție f_i este *ipoteză* a unei funcții f_j dacă și numai dacă atunci cînd $f_j = 0$, $f_i = 0$ (sau în general dacă $f_i \to f_j = 1$). O funcție f_j, este *concluzie* din f_i dacă și numai dacă f_j are valoarea 1 atunci cînd f_i are valoarea 1 (sau în general dacă $f_i \to f_j = 1$).

Pentru a afla toate ipotezele unei funcții date, aducem funcția la f.n.d.p. Fiecare parte a f.n.d.p. sau o transformare echivalentă cu aceasta va reprezenta o ipoteză pentru funcția dată. Parte a unei forme n.d.p. va fi a) însăși forma, b) oricare membru, c) oricare grup de membri.

Exemplu. Să se găsească ipotezele funcției $(p \vee q) \to p$. O aducem la f.n.d.p. $\overline{(p \vee q)} \vee p = (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee p = \bar{p}\bar{q} \vee pq \vee p\bar{q}$. Ultima expresie din echivalență) este f.n.d.p. Vor fi ipoteze 1) întreaga expresie, 2) membrii $\bar{p}\bar{q}$, pq, $p\bar{q}$, 3) grupele de membri $pq \vee \bar{p}\bar{q}$, $pq \vee p\bar{q}$, $p\bar{q} \vee \bar{p}\bar{q}$. Se poate verifica cu ajutorul matricelor dacă fiecare din expresiile date reprezintă o ipoteză.

Pentru a afla toate concluziile care decurg din premise date unim premisele cu ajutorul conjuncției și aducem expresia astfel obținută la f.n.c.p. Oricare parte a f.n.c.p. sau o transformare echivalentă cu ea va fi concluzie.

Exemplu. Fie funcțiile $p \cdot q$, $p \vee \bar{q}$, $\bar{p} \vee q$. Să se găsească concluziile lor.

Formăm conjuncția și aflăm f.n.c.p.

$$(p \cdot q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$$

$$p \cdot q \cdot p\bar{q} \cdot \bar{p}q$$

$$pq \cdot p\bar{q} \cdot \bar{p}q \quad \text{f.n.c.p.}$$

Vor fi concluzii 1) însăși f.n.c.p., 2) membri pq, $p\bar{q}$, $\bar{p}q$, 3) grupele $pq \cdot p\bar{q}$, $pq \cdot \bar{p}q$, $p\bar{q} \cdot \bar{p}q$.

8. MINIMIZAREA EXPRESIILOR

Într-o clasă de expresii echivalente există una cu cel mai mic număr de semne.

Am văzut că legile idempotenței, absorbției, excluderii (contopirii), cît și legile inverse distributivității asigură o simplificare a expresiilor. Procesul acesta de simplificare a expresiilor poartă numele de *minimizare*. Unele din aceste expresii sînt în forma normală și poartă numele de forme normale minime. Procesul de aflare a formelor normale minime se folosește ca de o etapă de formele normele perfecte.

Fie, de exemplu, f.n.d.p.

$$p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee pqr \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r$$

Aplicînd legea $AB \vee A\bar{B} = A$ obținem următoarele simplificări:

$$p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} = p\bar{q}$$

$$pqr \vee \bar{p}qr = qr$$

$$p\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}r = \bar{q}r$$

Rezultă $p\bar{q} \vee qr \vee \bar{q}r$. Regula de excludere se aplică de asemenea grupului $qr \vee \bar{q}r$, ceea ce dă r. Rezultatul final este $p\bar{q} \vee r$. Aceasta este f.n.d. minimă.

Simplificări dau și $A \vee AB = A$, $AB \vee AC = A(B \vee C)$ pentru f.n.d. precum și dualele lor pentru forma n.c. Procesul acesta de aplicare a regulilor de simplificare este însă nesigur cîtă vreme nu este integrat într-un algoritm riguros construit. Vom expune aci unii algoritmi de minimizare.

Formele normale disjunctive minime

Definiție. Numim formă normală disjunctivă minimă acea formă normală disjunctivă cu cel mai mic număr de litere posibil. O cale simplă de aflare a ei ar fi să construim toate formele n.d. ale unei expresii și să alegem pe cea mai scurtă dintre ele. Această metodă devine nepractică pentru un număr mai mare de variabile.

Algoritmul Quine-McCluskey[1]. În vederea însușirii acestui algoritm este necesar să ne amintim cum se face traducerea dintr-un sistem de numerație în altul. Ne limităm la sisteme cu baza $m \leqslant 10$. Regulă de traducere din S_{10} în S_m $(m < 10)$.

Fie un număr N reprezentat în sistemul cu baza 10 (adică cu zece cifre). Traducerea lui N se face aplicînd succesiunea de împărțiri:

$\frac{N}{m} = a;\ r_1$

$\frac{a}{m} = b;\ r_2$

unde literele a, b, ... d reprezintă cîturi, r_1, r_2 ... r_n resturile împărțirii (inclusiv 0) d un număr ce numai poate fi împărțit în numere întregi.

$d;\ r_n$

Reprezentarea lui N în S_m va fi: $dr_n r_{n-1} \ldots r_1$

Exemplu. Fie $N = 15$ și S_2 (deci $m = 2$, adică sistemul binar). Traducem după regula de mai sus:

$\frac{15}{2} = 7;\ 1$

$\frac{7}{2} = 3;\ 1$ Reprezentarea va avea forma 1111.

$\frac{3}{2} = 1;\ 1$

Regulă de traducere din S_m $(m < 10)$ în S_{10}. Fie un număr cu reprezentarea în S_m: $abcdk$ (unde literele reprezintă seria cifrelor). Traducerea în S_{10} se face după formula:

$am^{i-1} + bm^{i-2} + \ldots + dm + k$, unde i este ordinul cel mai înalt din seria de cifre (de la dreapta la stînga).

[1] Algoritmul este dat după V. M. Glușkov, Sinteza automatelor cifrice, Moscova, 1962.

Exemplu. Fie 101 în S_2. Cifra din față are ordinul trei (este a treia cifră numărînd de la dreapta).

$$(1 \times 2^{3-1}) + (0 \times 2^{2-1}) + (1 \times 2^0) = 5$$

Deoarece $2^0 = 1$, ultima cifră rămîne neschimbată, astfel că se poate scrie direct. Deci „5" va reprezenta în S_{10} ceea ce „101" va reprezenta în S_2.

Algoritmul lui Quine-Mc Cluskey cere o serie de noțiuni și de propoziții speciale.

(1) O funcție g se numește *implicant* (ipoteză sau premisă), al unei funcții f dacă pentru orice alegere de valori care dă $g = 1$ obținem de asemenea $f = 1$. De exemplu, q este implicant al funcției $p \rightarrow q$. Într-adevăr, alegerile (11) și (01) care dau $q = 1$ dau și $p \rightarrow q = 1$. Evident, printre implicanții acestei funcții se află însăși funcția $p \rightarrow q$. Dimpotrivă p nu este implicant. O funcție poate deci avea mai mulți implicanți.

(N.B. Deși „implicant" este tot una cu „ipoteză" noi preferăm aci terminologia specială a algoritmului dat.)

(2) Orice implicant q_i se numește *implicant simplu* al funcției f dacă el este o conjuncție primă și nici o parte a lui g_i nu este implicant al lui f.
Dintre implicanții $p\bar{q}r$, pqr, $p\bar{q}$, r numai ultimii doi sînt implicanți simpli ai funcției $(p \rightarrow q) \rightarrow r$. Primii doi conțin părți care sînt la rîndul lor implicanți ($p\bar{q}$ și resp. r).

(3) Se numește sistem al implicanților (respectiv al implicanților simpli) totalitatea implicanților (resp. a implicanților simpli) unei funcții date.

(4) Fiind dată o alegere pentru $f = 1$, vom spune că valoarea 1 a funcției f este *acoperită* de implicantul g al funcției f dacă pentru aceeași alegere obținem de asemenea $g = 1$. Fie de exemplu, funcțiile f, g_1, g_2, g_3 cu seriile de valori indicată în tabelul de mai jos. (Funcțiile sînt definite în raport cu aceeași mulțime de argumente.)

α	f	g_1	g_2	g_3
1 1	1	1	0	0
1 0	0	0	0	0
0 1	1	0	1	0
0 0	1	0	0	1

Se observă că prima valoare a lui f din seria 1011 este acoperită de g_1 deoarece pentru alegerea (11) care dă $f = 1$ se obține și $g_1 = 1$. Mai departe g_2 acoperă a doua unitate, iar g_3 pe a treia. Pentru una și aceeași unitate pot fi mai multe acoperiri. Astfel unitățile funcției f (1011) pot fi acoperite respectiv de g_4 (1010), g_5 (0011), g_6 (1001).

(5) Spunem că sistemul S al implicaților unei funcții este *complet* dacă și numai dacă pentru orice unitate din seria de valori a lui f există cel puțin o acoperire în S. În cazul de mai sus S(g_1, g_2, g_3) este complet, dar S(g_1, g_2) nu este astfel. Este complet și un singur implicant dacă are seria 1011. Un asemenea implicant este însăși funcția f.

(6) Disjuncția tuturor implicanților care intră într-un sistem S complet este echivalentă cu funcția dată.

(7) Sistemul tuturor implicanților simpli este un sistem complet.

(8) Disjuncția tuturor implicanților simpli ai funcției este echivalentă cu funcția. (Demonstrația acestor propoziții nu este dificilă).

(9) Se numește formă normală disjunctivă *prescurtată* a unei funcții date disjuncția tuturor implicanților simpli.

(10) Se numește sistem *redus* (ireductibil) al implicanților simpli acel sistem care este complet și nici o parte a lui nu mai este completă.

(11) Se numește formă normală disjunctivă *redusă* (ireductibilă) disjuncția tuturor implicanților unui sistem redus.

(12) Orice formă normală disjunctivă minimă este o formă normală disjunctivă redusă. Minimizarea pe baza propozițiilor (1) — (12) are două etape: a) găsirea tuturor implicanților simpli ai funcției date, b) găsirea formelor disjunctive reduse din care se aleg formele normale disjunctive minime.

Pe baza propozițiilor de mai sus (dezvoltate de Quine) Mc Cluskey introduce algoritmul de mai jos. Acest algoritm are la bază construirea pentru fiecare constituent de unu a unui număr corespunzător în sistemul zecimal.

(13) Se numește constituent de unu orice conjuncție primă care intră în componența unei forme normale disjunctive perfecte.

Numărul unui constituent de unu se construiește astfel a) se consideră f.n.d.p. cu literele ordonate alfabetic în fie-

care membru, b) alegerile în raport cu care constituenţii de unu capătă valoarea 1 se consideră ca număr în sistemul binar, c) se transcrie acest număr din sistemul binar în sistemul zecimal obţinînd astfel numărul constituentului.

Fie de exemplu, constituenții de unu *pqr*, $p\bar{q}r$, $p\bar{q}\bar{r}$. Ei iau valorile 1 respectiv pentru alegerile 111; 101; 100 (a se observa corespondenţa dintre alegere şi constituent). Socotind această serie de valori în sistemul binar ele au următoarele transcrieri în sistemul zecimal $111 \equiv 7$, $101 \equiv 5$, $100 \equiv 4$ (aci identitatea este între semne). Prin urmare numerele constituenţilor de mai sus vor fi respectiv 7, 5 şi 4.

(14) Se numeşte *indice* al unui număr al constituentului de 1 numărul de cifre 1 aflate în transcrierea binară a numărului zecimal dat. Exemplu, 7 are indicele 3 deoarece transcrierea binară conține 3 cifre de 1; numărul 5 are indicele 2 (vezi 101), iar 4 are indicele 1 (vezi 100).

(15) *Regulă.* Două numere x şi y reprezintă doi constituenţi care se contopesc (conform cu legile excluderii numite şi legile contopirii expresiilor), dacă şi numai dacă: a) numerele diferă unul de altul cu 2^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), b) indicii celor două numere diferă cu 1, c) numărul cu indicele mai mare este mai mare decît numărul cu indicele mai mic. De exemplu, numerele 5 şi 4 reprezintă doi constituenți care se contopesc. Într-adevăr, $5-4 = 2^0 = 1$ (condiția a)), indicele lui 5 este 2, iar indicele lui 4 este 1, deci diferența lor este 1 (condiţia b)), $5 > 4$ (condiția c)).

(16) Dacă P este o mulțime de numere ce desemnează o conjuncţie primă, această conjuncție primă intră în calitate de parte componentă în toți constituenţii de unu ale căror numere intră în mulțimea P. De exemplu, dacă avem mulțimea (1, 3, 5, 7) conjuncţia primă desemnată de această mulțime intră în conjuncţiile prime desemnate de mulţimile (1, 3) şi (5, 7).

(17) Dacă S şi R sînt două mulţimi de numere ce desemnează două conjuncții prime atunci conjuncția primă desemnată de R absoarbe (conform cu legea corespunzătoare de absorbţie) conjuncția primă desemnată de S, dacă şi numai dacă $S \subset R$ (S este cuprins în R). Astfel, conjuncţia primă desemnată de mulțimea (1, 3, 5, 7) absoarbe conjuncţiile prime desemnate de mulţimile (1, 3) şi (5, 7). De asemenea, conjunţia primă desemnată de (1, 3) absoarbe conjuncţiile desemnate de 1 şi 3.

(18) *Regulă.* Două mulțimi de numere P, Q care reprezintă conjuncții prime se contopesc între ele dacă a) diferențele lor sînt la fel, b) cele mai mici numere din aceste mulțimi sînt numere care se contopesc. Conjuncțiile desemnate de mulțimile (1,3) și (5,7) se contopesc deoarece au ambele diferența 2 (căci 3—1 = 2, 7 — 5 = 2) și cele mai mici numere, resp. 1 și 5 sînt numere care se contopesc (vezi regula (15)).

(19) Algoritm de aflare a implicanților simpli.

a) Se dau numerele constituenților de unu ai f.n.d.p.

b) Se grupează numerele după indici în ordinea crescătoare a indicilor.

c) Se formează grupele de numere care se contopesc; în fiecare grupă numerele se scriu în ordine crescătoare.

d) Dacă grupele obținute se mai contopesc, atunci efectuăm în continuare contopirile.

e) Efectuăm absorbțiile între grupele obținute prin contopire și numerele din care aceste grupe s-au obținut.

f) Mulțimile de numere necontopite sau neabsorbite reprezintă implicanți simpli pe baza cărora se formează f.n.d. prescurtată.

Odată ce am găsit f.n.d. prescurtată rămîne să îndeplinim și a doua etapă a minimizării, anume să aflăm formele normale disjunctive reduse (ireductibile) din care vom alege pe cele minime.

(20) Pentru a afla formele normale reduse ne folosim de tabelul de mai jos (tabelul lui Quine).

	a_1	a_2		a_n
g_1	*	*		*
g_2				*
g_m	*			

Aci a_1, a_2, a_n reprezintă numerele constituenților de unu, iar g_1, g_m mulțimile de numere al implicanților simpli.

Orice implicant se transformă în 1 în raport cu alegerea al cărei număr e conținut în mulțimea numerelor ce desemnează implicantul respectiv. Notăm cu o steluță acoperirile dintre implicanții simpli și constituenți (ca de exemplu așa cum e în tabel).

(21) Implicanții simpli cărora le corespunde o coloană (un șir vertical) cu o singură steluță formează *nucleul funcției.* Nucleul funcției trebuie să intre în orice f.n.d. ireductibilă

(22) Restul implicanților care nu intră în nucleu se distribuie pe lîngă nucleu în așa fel ca împreună cu acesta *să acopere pe toți constituenții de* 1. (Funcția nu trebuie să aibă mai mulți implicanți decît este necesar pentru a realiza o asemenea acoperire). Toate funcțiile astfel obținute sînt ireductibile.

Exemple. Să se găsească implicanții simpli ai funcției $f(p, q, r, s) = \bar{p}\bar{q}\bar{r}s \vee \bar{p}q\bar{r}s \vee \bar{p}\bar{q}rs \vee p\bar{q}\bar{r}s \vee p\bar{q}rs \vee \bar{p}qrs \vee pqrs$. Conform cu algoritmul indicat formăm niște tabele în care operațiile efectuate sînt puse în ordinea efectuării.

Constituenții	Alegerile care dau 1	Numerele constituenților	Indicii
$\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r}\ s$	0 0 0 1	1	1
$\bar{p}\ q\ \bar{r}\ s$	0 1 0 1	5	2
$\bar{p}\ \bar{q}\ r\ s$	0 0 1 1	3	2
$p\ \bar{q}\ \bar{r}\ s$	1 0 0 1	9	2
$p\ \bar{q}\ r\ s$	1 0 1 1	11	3
$p\ q\ r\ s$	0 1 1 1	7	3
$p\ q\ r\ s$	1 1 1 1	15	4

Alegerile, numerele și indicii se formează conform cu indicațiile date mai sus.

Indici	Numere	Contopiri	Contopiri
1	1*	(1,3) (2)* (1,5) (4)* (1,9) (8)*	(1, 3, 5, 7) (2) (4) (1, 3, 9, 11) (1) (8)
2	3*, 5*, 9*		
3	7*, 11*	(3,7) (4)*, (3,11) (8)* (5,7) (2)*, (9,11) (2)*	(3, 7, 11, 15) (4)(8)
4	15*	(7, 15) (8)* (11,15) (4)*	

Contopirile se efectuează conform cu regulile indicate (15), (18)). Steluțele reprezintă numerele (respectiv mulțimile de numere) care sînt absorbite de mulțimile formate prin contopire. Numerele de o cifră scrise în dreapta mulțimilor reprezintă diferențele. (De exemplu, (1, 3, 5, 7) (2) (4) are diferențele (2) și (4). Ele sînt diferențe ale mulțimilor (1, 3) și (5,7) contopite, adică (1, 3) (2) și (1,5) (4). Mai departe aplicăm tabelul lui Quine.

	1	3	5	7	9	11	15
(1, 3, 5, 7)	*	*	*	*			
(1, 3, 9, 11)	*	*			*	*	
(3, 7, 11, 15)		*		*		*	*

Nucleul funcției este constituit din toți cei trei implicanți deoarece fiecăruia îi corespunde o coloană cu o singură steluță. Astfel implicantului reprezentat de mulțimea (1, 3, 5, 7), îi corespunde coloana lui 5, celui de-al doilea (1, 3, 9, 11) îi corespunde coloana lui 9, iar celui de al treilea (3, 7, 11, 15) îi corespunde coloana lui 15. Deoarece în afară de implicanții care formează nucleul nu avem alții există o singură formă normală ireductibilă și deci ea este și f.n.d. minimă. Aceasta este $\bar{p}s \vee \bar{q}s \vee rs$. Cum trecem de la mulțimile de numere la expresia literală a funcției? (În cazul nostru cum obținem $\bar{p}s \vee \bar{q}s \vee rs$).

(23) *Reguli.* a) Se consideră mulțimea numerelor care reprezintă implicanții simpli precum și diferențele corespunzătoare (ex. (1, 3, 5, 7) (2) (4)); scriem una sub alta alegerile corespunzătoare unui număr oarecare din mulțime și alegerile corespunzătoare diferențelor.

b) Vom tăia din alegerea corespunzătoare numărului acele cifre care se află în dreptul cifrelor 1 din alegerile corespunzătoare diferențelor. Ceea ce rămîne se traduce în litere. În exercițiul de mai sus această parte a procesului decurge astfel. Considerăm mulțimea (1, 3, 5, 7) (2) (4) și scriem, de exem-

plu, alegerea corespunzătoare lui 1, de asemenea alegerile corespunzătoare diferenţelor 2 şi 4.

1 0ØØ1
2 0010
4 0100

Se observă că alegerile se formează, traducînd numărul în sistemul binar şi completînd (dacă e nevoie) la stînga cu zerouri pînă ce seria cifrelor este egală cu numărul de litere din constituenţi (în cazul nostru 4 litere, p, q, r, s). În locul cifrelor rămase în alegere punem literele corespunzătoare şi obţinem implicantul simplu căutat, adică $\bar{p}s$. Procedăm la fel cu mulţimea (1, 3, 9, 11) (2) (8). Scriem alegerile corespunzătoare să zicem numărului 9 precum şi cele pentru diferenţe:

9 — ł0ł1
2 — 0010
8 — 1000

Vom avea implicantul simplu $\bar{q}s$. Analog pentru mulţimea (3, 7, 11, 15) (4) (8), considerăm, să zicem numărul 3.

3 — Øł11
4 — 0100
8 — 1000

Implicantul simplu va fi rs. Formăm disjuncţia celor trei implicanţi, adică $\bar{p}s \vee \bar{q}s \vee rs$ şi vom avea forma căutată.

Exemplu. Se dă funcţia f(p, q, r) = (0, 1, 2, 5, 6, 7), unde numerele reprezintă constituenţii. Formăm pe rînd cele trei tabele conform cu regulile indicate.

Numere	Alegeri	Indici
0	000	0
1	001	1
2	010	1
5	101	2
6	110	2
7	111	3

Indicii	Numere	Contopiri
0	0*	(0,1) (1) (0,2) (2)
1	1*, 2*	(1,5) (4) (2,6) (4)
2	5*, 6*	(5,7) (2) (6,7) (1)
3	7*	

	0	1	2	5	6	7
(0,1)	*	*				
(0,2)	*		*			
(1,5)		*		*		
(2,6)			*		*	
(5,7)				*		*
(6,7)					*	*

Se observă că fiecare constituent are cîte două acoperiri. Vom avea în consecință două forme normale minime fiecare cu cîte trei membri. Grupa (0,1) (5,7) (2,6) va da $\bar{p}\bar{q} \vee pr \vee q\bar{r}$, iar grupa (0,2) (1,5) (6,7) va da $\bar{p}\bar{r} \vee \bar{q}r \vee pq$.

Formele normale conjunctive minime. Procedeul de mai sus poate fi reformulat pentru obținerea formelor normale conjunctive minime, avînd în vedere dualitatea conjuncției față de disjuncție. Uneori f.n.c.m. sînt mai simple decît f.n.d.m. De exemplu $\bar{p}\bar{r} \vee \bar{p}s$ poate fi redusă la $\bar{p} \cdot (\bar{r} \vee s)$ care conține un număr mai mic de semne.

Pentru a aplica procedeul Quine — Mc Cluskey trebuie să definim noțiunile corespunzătoare pentru conjuncție „constituent de zero", „consecvent", „consecvent simplu". În mod dual vor fi apoi reformulate regulile și tabelele.

9. AXIOMATIZAREA LOGICII PROPOZIȚIILOR

Logica propozițiilor așa cum a fost expusă pînă aci are un caracter algebric — adică au fost formulate problemele și s-au dat procedeele de rezolvare independent de sistemul general al propozițiilor logice. Logica propoziției poate însă

fi organizată ca un sistem teoretic pe baza metodei axiomatice.

Un sistem axiomatic poate să fie intuitiv sau formalizat. În sistemul axiomatic intuitiv se ține seama de înțelesul expresiilor și se operează cu ele ținînd seama de acest înțeles, în timp ce într-un sistem axiomatic formalizat se face abstracție de conținutul expresiilor operîndu-se numai cu forma lor grafică în virtutea unor reguli formale Cu alte cuvinte, vom avea de a face aci numai cu formule al căror conținut nu ne interesează. Un sistem axiomatic sc construiește în felul următor: a) se dă lista de semne, b) se dau regulile de formare a formulelor compuse din formule date, c) se dă lista de axiome (și eventual unele definiții), d) se dau regulile de deducție. Conceptele principale ale unui sistem axiomatic sînt definiția, axioma, regula și teorema. Definiția este o propoziție sau o formulă prin care unele expresii sînt introduse pe baza altora, altfel spus sînt „reduse' la exprésii date inițial.

Axioma este o propoziție (resp. o formulă) luată ca nedemonstrată (în sens mai riguros nici nu poate fi demonstrată) în sistemul considerat. Spre deosebire de concepția tradițională „axioma" are sens relativ la sistem.

Regula este o propoziție cu ajutorul căreia din propoziții date (una sau mai multe), respectiv din formulele date putem obține alte propoziții, respectiv alte formule.

Teorema este orice propoziție (resp. formulă) dedusă din axiome pe baza regulilor de deducție. Uneori teorema este luată în sens mai larg: teorema este sau o axiomă sau o propoziție dedusă din axiome pe baza regulilor de deducție. Teorema se mai numește și „teză". Definițiile inițiale, axiomele și regulile inițiale deoarece sînt *puse* fără a fi derivate din alte propoziții (resp. formule) pot fi numite la un loc „postulate". În mod obișnuit postulatul este luat în sens dc axiomă. Tot în clasa postulatelor pot fi incluse și anumite convenții.

Sistemul axiomatic nu este numai un mod de organizare a științei, ci și un mijloc de decizie, adică unele propoziții sînt declarate ca adevărate prin corelarea lor logică cu anumite propoziții inițiale (axiome, definiții).

Din însăși definirea conceptelor fundamentale ale sistemelor axiomatice decurge că aceste concepte sînt relative și că

în raport cu una şi aceeaşi mulţime de propoziţii putem construi mai multe sisteme de axiome (cu definiţii, axiome şi chiar reguli de deducţie deosebite). În logică procedeul axiomatic a fost utilizat într-o formă imperfectă — chiar de Aristotel, întemeietorul acestei ştiinţe (vezi axioma „dictum de omni et de nullo").

Metoda axiomatică cunoaşte o largă aplicare în logică, începînd cu Gottlob Frege care şi construieşte un sistem a cărui valoare este recunoscută şi astăzi. Sistemul lui Frege are la bază 6 axiome şi două reguli de deducţie (regula substituţiei şi regula modus ponens). Frege reduce prin definiţie toţi operatorii la implicaţie şi negaţie. Alte sisteme au fost construite de Russell, Hilbert, Lukasiewicz, Church, Nicod ş.a. Din punct de vedere didactic probabil că sistemul lui David Hilbert şi W. Ackermann este cel mai indicat. Tocmai de aceea am ales pentru expunere acest sistem.

Sistemul axiomatic Hilbert-Ackermann. Acest sistem este obţinut printr-o simplificare a sistemului construit de Whitehead şi Russell în „Principia Mathematica". Pentru expunere vom folosi lista de simboluri introdusă anterior. Operatorii de bază sînt $\vee$, —, dar este folosită şi implicaţia ca prescurtare, adică $p \rightarrow q$ este considerată o prescurtare, pentru $\bar{p} \vee q$. Ceilalţi operatori sînt reduşi prin definiţie la disjuncţie ($\vee$) şi negaţie (—). Prin urmare, vom avea lista de simboluri $p, q, r,$ variabile propoziţionale, $\vee$, — (operatori de bază); $\rightarrow$, $\cdot$, $=$, $/$, $\swarrow$ ş.a. operatori introduşi prin definiţie.

Reguli de formare.

1. Variabilele propoziţionale sînt formule.
2. Dacă A este o formulă $\bar{A}$ este de asemenea o formulă.
3. Dacă A şi B sînt formule atunci $A \vee B$, $A \cdot B$, $A + B$, $A \rightarrow B$, $A = B$, A/B, $A \swarrow B$ sînt de asemenea formule.

Df. 1 $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$

Df. 2 $p \cdot q = \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$

Df. 3 $(p = q) = \overline{\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \overline{(\bar{q} \vee p)}}$

Df. 4 $p/q = \bar{p} \vee \bar{q}$

Df. 5 $p \swarrow q = \overline{p \vee q}$

Axiome.

Ax_1. $(p \vee q) \rightarrow p$
Ax_2. $p \rightarrow (p \vee q)$
Ax_3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
Ax_4. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$
(Semnul $\rightarrow$ este așa cum am spus o prescurtare).

Reguli de deducție.

I. *Regula detașării* (*modus ponens*). Dacă este dovedit A și dacă este dovedit A $\rightarrow$ B atunci este dovedit B (separat, detașat de A). Simbolic putem scrie A, A $\rightarrow$ B $\vdash$ B, unde $\vdash$ arată că partea dreaptă se deduce din cea stîngă.

II. *Regula substituției.* Într-o formulă A, o variabilă propozițională α poate fi substituită cu o formulă oarecare B, cu condiția ca variabila α să fie înlocuită pretutindeni unde apare (în formula A) cu formula B.

Faptul că o variabilă α este substituită cu o formulă B va fi notat α/B (citește „α se substituie cu B").*

Exemplu. Fie formula $(p \cdot q) \rightarrow (q \cdot p)$. Se cere să efectuăm substituția $p/q \cdot r$. Vom obține $((q \cdot r) \cdot q) \rightarrow (q \cdot (q \cdot r))$. Să introducem apoi reguli derivate corespunzătoare axiomelor.

III. *Regula idempotenței disjuncției.* A $\vee$ A $\vdash$ A.

Demonstrație. În Ax_1 se operează p/A și se obține (A $\vee$ A) $\rightarrow$ $\rightarrow$ A. Se aplică apoi regula modus ponens astfel A $\vee$ A, (A $\vee$ A) $\rightarrow$ $\rightarrow$ A $\vdash$ A. Deoarece formula (A $\vee$ A) $\rightarrow$ A este demonstrată demonstrația lui A va mai depinde în continuare doar de A $\vee$ A, astfel că putem scrie A $\vee$ A $\vdash$ A.

IV. *Regula extinderii disjuncției* (o parte a disjuncției implică disjuncția, orice formulă implică disjuncția sa cu alta): A $\vdash$ A $\vee$ B.

Demonstrație. În Ax_2 se oprează p/A, q/B: A $\rightarrow$ (A $\vee$ B); se aplică regula I (modus ponens): A, A $\rightarrow$ (A $\vee$ B) $\vdash$ A $\vee$ B, se suprimă premisa deja dovedită, astfel concluzia mai depinde doar de demonstrația lui A, ceea ce și spune regula A $\vdash$ A $\vee$ B.

V. *Regula comutativității disjuncției.* A $\vee$ B $\vdash$ B $\vee$ A.

Demonstrație. În Ax_3 se operează p/A, q/B : (A $\vee$ B) $\rightarrow$ (B $\vee$ A); se aplică reg. I: A $\vee$ B, (A $\vee$ B) $\rightarrow$ (B $\vee$ A) $\vdash$ B $\vee$ A;

* A nu se confunda cu semnul incompatibilității (acesta nu apare în demonstrațiile de aci)

se suprimă premisa deja demonstrată şi astfel concluzia mai depinde doar de demonstrarea lui $A \vee B$.

VI. *Regula extinderii disjunctive a termenilor implicației.* (disjuncția consecventului cu o formulă se deduce din disjuncția antecedentului cu aceeaşi formulă): $A \rightarrow B \vdash (C \vee A) \rightarrow (C \vee B)$.

Demonstrație. În Ax_4 se operează p/A, q/B, r/C şi se obține $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))$; se aplică regula I şi se elimină premisa demonstrată.

În continuare vom da demonstrații de *teoreme* şi de alte reguli. Vom nota axiomele pur şi simplu cu cifrele respective (1, 2, 3, 4), regulile cu cifrele romane corespunzătoare (I, II, ...), definițiile cu def_1, def_2, iar teoremele cu Th_i. ($i = 1$, 2,). Deoarece demonstrațiile vor fi prezentate prescurtat convenim să adoptăm următorul sistem de convenții: a) semnul V va fi scris numai cînd acest lucru este necesar, în rest el va fi subînțeles, b) scriem numărul axiomei sau al teoremei şi indicăm operațiile de efectuat (substituții sau aplicarea altor reguli); c) dacă se întrerupe seria demonstrativă pentru a începe alta, rezultatul primei serii va fi notat cu *, al celei de a doua cu două ** etc.; d) cînd o regulă se aplică la două formule deodată ea va urma după cele două puse în paranteză; e) înaintea rezultatului cerut vom pune o liniuță.

Teorema 1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$

Demonstrație: 4, $r/\bar{r}$, def_1 — Th. 1.

VII. *Regula silogismului* sau *regula tranzitivității**. Dacă este dovedită formula $A \rightarrow B$ şi este dovedită formula $B \rightarrow C$, atunci este dovedită formula $A \rightarrow C$. Prescurtat:

$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C.$

Demonstrație: Th_1, p/B, q/C, r/A, I, I — III.

Aceasta înseamnă că în Th. 1. se operează substituțiile p/B, q/C, r/A şi se aplică la ceea ce se obține regula I de două ori.

* Vezi în legătură cu această regulă observațiile noastre din „Revista de filozofie", nr. 2/1967.

Teorema **2.** $\bar{p} \vee p$ (legea terțului exclus)
Demonstrație: 2, q/p^*, (*, 1), VII, def. 1 — Th. 2.
Teorema **3.** $p \vee \bar{p}$
Demonstrație: Th 2, V — Th. 3
Teorema **4.** $p \rightarrow \bar{\bar{p}}$
Demonstrație: Th_3, $p/\bar{p}$, def. 1. — Th_4
Teorema **5.** $\bar{\bar{p}} \rightarrow p$
Demonstrație: Th 4, $p/\bar{p}$, VI*, (*, Th 3), I, V, def. 1 — Th. 5. Din Th 4, Th 5, se obține prin def. 3 $p = p$
Teorema **6.** $(p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$ (legea contrapoziției)
Demonstrație: Th4, p/q, VI*; 3, $p/\bar{p}$, $q/\bar{\bar{q}}^{**}$, (*,**), VII, def. 1) — Th. 6. Desfășurată această demonstrație arată astfel:

$p \rightarrow \bar{\bar{p}}$, p/q	$pq \rightarrow qp$, $p/\bar{p}$, $q/\bar{\bar{q}}$
$q \rightarrow \bar{\bar{q}}$, VI	$\bar{p}\bar{\bar{q}} \rightarrow \bar{\bar{q}}p$ **
$\bar{p}q \rightarrow \bar{p}\bar{\bar{q}}$ *	

Conf. cu reg. VII $\bar{p}q \rightarrow \bar{p}\bar{\bar{q}}$

$\bar{p}\bar{\bar{q}} \rightarrow \bar{\bar{q}}p$

$\bar{p}q \rightarrow \bar{\bar{q}}p$ de unde prin def. 1 — Th. 6.

VIII. *Regula substituirii expresiilor echivalente.* Dacă două formule se deduc una din alta, pot fi puse una în locul alteia. *Simbolic*: dacă sînt demonstrate formulele Ø (A), A → B, B → A atunci sînt demonstrate și formulele Ø(A) → Ø (B), Ø(B) →Ø(A). Expresiile „Ø(A)" și „Ø(B)" înseamnă respectiv formula Ø cu partea A, resp. cu partea B. Pentru a demonstra această regulă vom lua cazul în care A se întîlnește o singură dată (generalizarea rezultatului nefiind dificilă). La rîndul său cazul acesta se divide în trei: cînd Ø(A), are forma $\bar{A}$, CA și AC (avînd în vedere că în simbolism sînt acceptați doar doi operatori (—, V).

Cazul formei $\bar{A}$. Presupunem ca demonstrate A → B și B → → A. Dacă în Th. 6. operăm p/A, q/B obținem (A → B) → → ($\bar{B}$ → $\bar{A}$). Deoarece A → B a fost presupus rezultă prin I

$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$. Tot în Th_6 operăm p/B, q/A şi obţinem $(B \rightarrow A) \rightarrow$
$\rightarrow (\overline{A} \rightarrow \overline{B})$.

Cum $B \rightarrow A$ este presupus rezultă prin reg. I că $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$. În acest fel s-a dovedit că dacă A şi B se află în raport de deducţie reciprocă, $\overline{A}$ şi $\overline{B}$ de asemenea se află în acest raport. Deci $\overline{A}$ poate fi înlocuit cu $\overline{B}$.

Cazul formei CA. Din formulele presupuse $A \rightarrow B$ şi $B \rightarrow A$ prin reg. VI obţincm respectiv $CA \rightarrow CB$ şi $CB \rightarrow CA$ — Rezultă că CA poate fi înlocuit cu CB.

Cazul formei AC se reduce la cazul al doilea. În Ax_3 operăm p/A, q/C şi obţinem $AC \rightarrow CA$. Din $AC \rightarrow CA$ şi $CA \rightarrow CB$ obţinem prin reg. VII $AC \rightarrow CB$. În Ax_3 operăm p/C, q/B şi obţinem $CB \rightarrow BC$. Din $AC \rightarrow CB$ şî $CB \rightarrow BC$ prin reg. VII obţinem $AC \rightarrow BC$ (aceasta este prima parte a demonstraţiei). În Ax_3 operăm p/B, q/C, şi obţinem $BC \rightarrow CB$, apoi în aceeaşi axiomă p/C, q/A şi obţinem $CA \rightarrow AC$. Din $BC \rightarrow CB$ şi $CB \rightarrow CA$ (cazul doi) prin reg. VII obţinem $BC \rightarrow CA$. Din $BC \rightarrow CA$ şi $CA \rightarrow AC$ prin reg. VII obţinem $BC \rightarrow AC$ (a doua parte a demonstraţiei a fost realizată). În acest fel s-a dovedit că AC poate fi înlocuit cu BC, căci $AC \rightarrow BC$ şi $BC \rightarrow AC$.

Teorema 7. $(q \vee p) \rightarrow (p \vee q)$ Demonstraţie din Ax_3.

Teorema **8.** $\overline{p \cdot q} \rightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$

Demonstraţie. Th. 5, $p/\overline{\bar{p}\bar{q}}$, def. 2 — Th. 8

Teorema **9.** $(\bar{p} \vee \bar{q}) \rightarrow \overline{(p \cdot q)}$

Demonstraţie. Th 4, $p/\bar{p}\bar{q}$, def. 2, Th. 9.

Notă: Se observă că în Th. 8 şi Th. 9 am aplicat def. 2 la o singură parte a formulei; respectiv am înlocuit $\overline{\overline{\bar{p}\bar{q}}}$ din $\overline{\overline{\overline{\bar{p}\bar{q}}}}$ cu $p \cdot q$, ceea ce ne permite reg. VIII (regula substituirii de echivalente). Din Th. 8 şi Th. 9 obţinem $\overline{p \cdot q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ (legea lui de Morgan).

Teorema **10.** $\overline{p \vee q} \rightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q})$.

Demonstraţie. (Th. 4, Th. 5), VII, $p/\overline{\bar{p} \vee q}$, VIII ($p$ cu $\bar{\bar{p}}$ şi q cu $\bar{\bar{q}}$ în membrul doi), VIII ($\overline{\bar{\bar{p}} \vee \bar{\bar{q}}}$ cu $\bar{p} \cdot \bar{q}$) — Th. 10.

Teorema **11.** $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \rightarrow \overline{p \vee q}$.

Demonstraţie. Se obţine analog cu Th. 10 operînd în membrul întîi un schimb de echivalente. Din Th. 10 şi Th 11 se obţine $\overline{p \vee q} = (\bar{p} \cdot \bar{q})$ (a doua lege a lui de Morgan).

Teorema **12.** $(p \cdot q) \rightarrow (q \cdot p)$

Demonstrație. Th. 6, p/pq, q/qp^*, (3, *), I, $p/\bar{q}$, $q/\bar{p}$, VIII (cu def. 2) — Th. 12.

Teorema **13.** $(q \cdot p) \rightarrow (p \cdot q)$

Demonstrație. Th. 12, p/q, q/p — Th. 13.

Se poate demonstra și altfel:

— Th. 6, p/pq, q/qp^*, (3, *), I, $q/\bar{q}$, $p/\bar{p}$, VIII (def.2) — Th. 13. Din Th. 12 și Th. 13 obținem $p \cdot q = q \cdot p$ (prin def. echivalcnței și a implicației).

Teorema **14.** $(p \cdot q) \rightarrow p$

Demonstrație. Th. 6, q/pq^*, (2, *), I, $p/\bar{p}$, $q/\bar{q}$, VIII $\bar{\bar{p}}/p, \bar{\bar{q}}/q$ — Th. 14.

Teorema **15.** $(p \cdot q) \rightarrow q$

Demonstrație. Th. 14, p/q, q/p^*, (Th. 12, *), VII — Th. 15.

Teorema **16.** $p(qr) \rightarrow q(pr)$.

Dăm desfășurat această demonstrație.

Prima serie

$p \rightarrow pq$ (reg. VIII)
$p \rightarrow qp$ (p/r, q/p)
$r \rightarrow pr$ (VI)
$qr \rightarrow q(pr)$ (VI)
$p(qr) \rightarrow p(q(pr))^*$

A doua serie

$p \rightarrow pq$ (p/r)
$p \rightarrow pr^{\alpha)}$ (VIII)
$p \rightarrow rp$(p/pr, r/q)
$pr \rightarrow q(pr)^{\beta)}$
α), β) (VII)
$p \rightarrow q(pr)$ (VI)
$(q(pr))p \rightarrow (q(pr)(q(pr))$ (VI)
(Membrul doi se reduce conform cu reg. III).
$q(pr)p \rightarrow q(pr)$ (VIII) (comutativitatea disjuncției).
$p(q(pr)) \rightarrow (q(pr))^{**}$

A treia serie

(*, **) (VII)
$p(qr) \rightarrow q(pr)$ q.e.d.

Teorema **17.** $p(qr) \rightarrow (pq)r$.

Demonstrație. Se demonstrează mai întîi $p \rightarrow p$, apoi p/pq, q/qr, VIII (qr cu rq în membrul doi)*, Th. 16, q/r, r/q **, (**, *), VI, VIII ($r(pq)$ cu $(pq)r$ în membrul doi) — Th. 17.

Teorema **18.** $(pq)r \rightarrow p(qr)$

Demonstrație. Th. 17, p/r, r/p, VIII (în membrul unu se pune $(pq)r$, iar în doi $p(rq)$), VIII (în doi rq cu qr) — Th. 18.

Din Th. 17 și Th. 18, se obține $p(qr) = (pq)r$ (asociativitatea disjuncției).

Teorema **19.** $p \cdot (q \cdot r) \rightarrow (p \cdot q) \cdot r$.

Demonstrație. Th 6, $p/(\bar{p}\bar{q})\bar{r}$, $q/\bar{p}(\bar{q}\bar{r})^{*}$; Th. 18, $p/\bar{p}$, $q/\bar{q}$, $r/\bar{r}^{**}$, (*, **), I, VIII, ($\bar{q}\bar{r}$ cu $\overline{\overline{\bar{q}\bar{r}}}$ și $\bar{p}\bar{q}$ cu $\overline{\overline{\bar{p}\bar{q}}}$), VIII (def. 2) — Th. 19.

Teorema **20.** $(p \cdot q) \cdot r \rightarrow p \cdot (q \cdot r)$ (analog cu Th. 19).

Din Th. 19 și Th. 20 obținem $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ (asociativitatea conjuncției).

Teorema **21.** $p \rightarrow (q \rightarrow (p \cdot q))$

Demonstrație. Th. 3, $p/\bar{p}\bar{q}$, VIII (prin asociativitatea disjuncției), VIII, (def. 2), VIII (def. 1) — Th. 21.

IX. Regulă. Din A → (B → C) se deduce B → (A → C) și reciproc.

Demonstrație. Formula A → (B → C) conf. cu def. 1 este echivalentă cu $\bar{A}(\bar{B}C)$. De aci prin comutativitate se obține $(\bar{B}C)\bar{A}$, iar prin asociativitate $\bar{B}(C\bar{A})$ și în fine prin comutativitate $\bar{B}(\bar{A}C)$. Dar din $\bar{B}(\bar{A}C)$ prin def. 1 se obține a doua parte a reg. IX, adică B → (A → C). În mod analog se dovedește că și prima parte se deduce din a doua.

X. Regulă. Din A → (B → C) se deduce (A • B) → C și reciproc.

Demonstrație. Se demonstrează prin asociativitate și aplicarea reg. VIII combinată cu def. 1 și def. 2.

XI. Regulă. Din A → (A → B) se deduce A → B și reciproc. Se folosește asociativitatea și reg. VIII (combinată cu III).

Teorema **22** $p(q \cdot r) \rightarrow (pq \cdot pr)$

Demonstrație

Seria I	*Seria a II-a*	*Seria a III-a*
$(p \cdot q) \rightarrow p(p/q, q/r)$	$(p \cdot q) \rightarrow q(p/q, q/r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \cdot q))$
$(q \cdot r) \rightarrow q$ (VI)	$(q \cdot r) \rightarrow r$ (VI)	(p/pq) $q/pr)$
$p(q \cdot r) \rightarrow pq^{*}$	$p(q \cdot r) \rightarrow pr^{**}$	$pq \rightarrow (pr \rightarrow (pq \cdot pr)^{***}$

$$(^{*},\ ^{***})\ (VII)$$

$$p(q\cdot r) \rightarrow (pr \rightarrow (pq\cdot pr))\ (IX)$$

$$pr \rightarrow (p(q\cdot r) \rightarrow (pq\cdot pr)\ ^{****}$$

$$(^{**},\ ^{****})\ (VII)$$

$$p(q\cdot r) \rightarrow ((p(q\cdot r) \rightarrow (pq\cdot pr))\ (XI)$$

$$p(q\cdot r) \rightarrow (pq\cdot pr) \quad \text{q.e.d.}$$

Teorema **23.** $(pq\cdot pr) \rightarrow p(q\cdot r)$

***Demonstrație*:**

$p \rightarrow (q \rightarrow (p\cdot q))\ (p/q,\ q/r)$

$q \rightarrow (r \rightarrow (q\cdot r))^{*}$

$(p \rightarrow q) \rightarrow (rp \rightarrow rq)$

$(p/r,\ q/q\cdot r,\ r/p)$

$(r \rightarrow (q\cdot r)) \rightarrow (pr \rightarrow p(q\cdot r))^{**}$

$$(^{*},\ ^{**})\ (VII)$$

$q \rightarrow (pr \rightarrow p(q\cdot r)\ (IX)$

$pr \rightarrow (q \rightarrow p(q\cdot r)\ ^{***}$

4, $(p/q,\ q/p(q\cdot r),\ r/p)$

$\rightarrow p(q\cdot r) \rightarrow (pq \rightarrow p(p(q\cdot r))^{****}$

$(^{***},\ ^{****})\ (VII)$

$pr \rightarrow (pq \rightarrow (p(p(p(q\cdot r)))\ (IX)$

$pq \rightarrow (pr \rightarrow p(p(q\cdot r))\ (VIII)$

se înlocuiește $p(p(q\cdot r))$ cu

$p(p\cdot r))$

$pq \rightarrow (pr \rightarrow p(q\cdot r))\ (IX)$

$(pq\cdot pr) \rightarrow p(q\cdot r)$ q.e.d.

Din 30 și 31 se obține prin prescurtare:

$$p(q\cdot r) = pq\cdot pr$$

Deoarece orice formulă poate fi verificată prin forma normală conjunctivă, nu este necesar mai departe să demonstrăm, ci, pe baza celor de mai sus formulăm reguli de aducere la f.n.c.

10. PROPRIETĂȚILE SISTEMULUI AXIOMATIC

a. Un sistem axiomatic pentru a fi acceptat trebuie să satisfacă trei proprietăți formale: necontradicția (consistența), completitudinea și independența (ultima nu este socotită obligatorie de către toți). Aceste proprietăți pot fi definite pur formal („sintactic") sau pe baza unei interpretări („semantic").

Necontradicția. Spunem că un sistem axiomatic este necontradictoriu dacă și numai dacă în el nu poate fi demonstrată o formulă împreună cu negația ei, adică dacă o formulă de forma $A \cdot \bar{A}$ nu este teoremă în acest sistem.

Independența. Spunem că un sistem axiomatic este independent dacă nici una dintre axiomele sale nu poate fi dedusă din restul axiomelor.

Completitudinea. Spunem că un sistem S este complet dacă, adăugînd la acest S o formulă A nedemonstrabilă în S, obținem o contradicție astfel: $(S \cdot A) \vdash (B \cdot \bar{B})$. (Completitudinea în sens restrîns, valabilă pentru logica propozițiilor).

Cum se demonstrează aceste proprietăți? Un procedeu obișnuit este acela al interpretării. De acest procedeu se folosesc Hilbert și Ackermann în lucrarea lor *Bazele logicii teoretice*. Apelul la interpretare cere să dăm definiții așa-zis „semantice" pentru cele trei proprietăți, și nu pur formale („sintactice").

Spunem că un sistem este semantic necontradictoriu dacă și numai dacă prin interpretare toate axiomele și teoremele (obținute din axiome cu ajutorul regulilor) au o anumită proprietate (de exemplu de a fi *adevărate*), pe care nici o altă formulă din sistem nu o are.

Spunem că un sistem de axiome este semantic independent dacă și numai dacă pentru fiecare axiomă se poate indica o astfel de interpretare a variabilelor care dă o anumită valoare (sau anumite valori) pentru tot restul axiomelor în timp ce axioma considerată nu are această valoare (sau aceste valori). Și mai general vorbind, printr-o anumită interpretare axioma considerată nu are o anumită proprietate pe care o au toate celelalte.

Spunem că un sistem axiomatic este sistem complet dacă și numai dacă toate formulele identic-adevărate construibile în sistem sînt axiome sau teoreme în acest sistem. Această noțiune nu este identică cu prima, ea are o valabilitate mai generală.

Dăm demonstrația acestor trei proprietăți.

b. **Necontradicția.** Pentru a demonstra această proprietate, apelăm la mulțimea de semnificații (1, 0). Operatorii vor fi definiți matriceal. Se arată mai întîi că toate axiomele au valoarea 1, indiferent de valorile 1 sau 0 acordate variabilelor. Calculul se face matriceal. În al doilea rînd, se arată că toate formulele deduse prin cele trei reguli au de asemenea valoarea 1.

Regula I (*modus ponens*). $A, A \rightarrow B \vdash B$

Formulele A și A→B reprezintă axiome, sau teoreme, deci: $A=1$, $A \rightarrow B=1$. Presupunem că $B=0$. Substituim în $A \rightarrow B=1$ pe A și B cu valorile lor, respectiv cu 1 și 0, și obținem $1 \rightarrow 0 = 1$, ceea ce contrazice definiția implicației și deci nu poate fi acceptat. Rezultă de aici că B nu poate avea valoarea 0, ci trebuie să aibă valoarea 1. Orice formulă dedusă prin regula I din axiome va avea valoarea 1.

Regula substituției. Fie o axiomă A* care conține o variabilă p, ceea ce vom scrie A(p); $A(p) = 1$. Aceasta înseamnă că oricare ar fi valorile lui p, 1 sau 0, valoarea axiomei nu se schimbă, deci $A(1) = 1$ și $A(0) = 1$. Punînd în locul lui p o variabilă q, vom obține formula $A(q)$. Presupunînd că $A(q) = 0$, din $q = 1$ sau $q = 0$, rezultă că $A(1) = 0$ și $A(0) = 0$. Or, aceste două formule contrazic formulele $A(1) = 1$ și $A(0) = 0$. În concluzie $A(q)$ nu poate avea valoarea 0, ci trebuie să fie $A(q) = 1$.

c. **Independența.** *Axioma* 1. Fie mulțimea de valori (0,1,2)**. Definim operatorii negației și disjuncției astfel

p	0	1	2
$\bar{p}$	1	0	2

$p \setminus q$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

Se demonstrează că axiomele 2, 3, 4 precum și teoremele care decurg din ele au valoarea 0 în timp ce axioma 1 nu are această proprietate. Verificăm acest lucru pentru axioma 2.

* Sau teoremă.

** Poate fi clasa resturilor față de modulul 4.

p	q	$\bar{p} \vee (p \vee q)$		
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	2	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	1
1	2	0	0	2
2	0	2	0	0
2	1	2	0	2
2	2	2	0	0

Analog se arată că 2 și 4 au valoarea 0. Axioma 1 nu are această proprietate.

$$\overline{(p \vee p)} \vee p$$
$$\overline{0 \vee 0} \vee 0 = 0$$
$$\overline{1 \vee 1} \vee 1 = 0 \vee 1 = 0$$
$$\overline{2 \vee 2} \vee 2 = \bar{0} \vee 2 = 1 \vee 2 = 2.$$

În cazul în care p ia valoarea 2, rezultatul va fi 2.

Axioma **2.** Considerăm mulțimea de semnificații (0, 1, 2, 3). Definim operatorii —, $\vee$.

p	0	1	2	3
$\bar{p}$	1	0	3	2

Negația

p \ q	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

Disjuncția

Se demonstrează matriceal că axiomele 1, 3 și 4 precum și teoremele care decurg din ele au în raport cu aceste semnificații numai semnificațiile 0 sau 2, în timp ce axioma 2 nu are această proprietate.

Fie axioma 1. Se substituie pe rînd p cu 0, 1, 2, 3.

$$\overline{p \vee p} \vee p$$
$$\overline{0 \vee 0} \vee 0 = 1 \vee 0 = 0$$
$$\overline{1 \vee 1} \vee 1 = 0 \vee 1 = 0$$
$$\overline{2 \vee 2} \vee 2 = 3 \vee 2 = 2$$
$$\overline{3 \vee 3} \vee 3 = 2 \vee 3 = 2$$

Axioma 2 nu are această proprietate, deoarece pentru cazul $3 \vee (2 \vee 1) = 3 \vee 1 = 1$.

Axioma 3. Considerăm aceeaşi mulţime de semnificaţii ca şi mai sus (0, 1, 2, 3). Definim operatorii — şi $\vee$ astfel:

p	0 1 2 3
$\bar{p}$	1 0 0 2

$p \backslash q$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	3	3

Se poate demonstra matriceal că axiomele 1, 2 şi 4 precum şi toate teoremele care se deduc din ele iau valoarea 0, în timp ce axioma 3 nu are această proprietate. Într-adevăr, pentru cazul în care $p = 2$ şi $q = 3$, axioma 3 ia valoarea 3.

Axioma 4. Considerăm din nou mulţimea de semnificaţii (0, 1, 2, 3). Definim operatorii, —, $\vee$.

p	0 1 2 3
$\bar{p}$	1 0 3 0

$p \backslash q$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	0	3

În aceste condiţii axiomele 1, 2 şi 3, precum şi toate teoremele care se deduc din ele au valoarea 0, în timp ce axioma 4 nu are această proprietate. Într-adevăr, pentru $p = 3$, $q = 1$ şi $r = 2$, axioma 4 ia valoarea 2.

d. **Completitudinea.** Demonstraţia decurge astfel. La sistemul de axiome se adaugă formula $p \vee q$.

1. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
2. $p \vee q$ (la 1 şi aplică modus ponens)
3. $q \vee p$ (q/p)
4. $p \vee p$ $(p/\bar{p})$
5. $\bar{p} \vee \bar{p}$

Din 4, prin regula corespunzătoare legii idempotenței, se deduce 6. p. Din 5, prin regula idempotenței, se deduce 7. $\bar{p}$. În acest fel s-a dovedit o contradicție 8. $p \cdot \bar{p}$. Completitudinea este în acest fel demonstrată.

De notat este că semnificațiile de mai sus pot fi interpretate ca fiind valori logice (de exemplu, în logica bivalentă sau respectiv în logicile n-valente cînd avem mai mult de două valori). La fel de bine valorile respective pot însemna și altceva (numere cărora li se impun anumite condiții, vezi nota**, p. 81).

c. Alte sisteme axiomatice

a) *Sistemul lui Frege*

Ax_1 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Ax_2 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Ax_3 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

Ax_4 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$

Ax_5 $\bar{\bar{p}} \rightarrow p$

Ax_6 $p \rightarrow \bar{\bar{p}}$

Regula substituției și regula detașării. Ceilalți operatori se reduc prin definiție la $\rightarrow$, —.

b) *Sistemul lui Lukasiewicz*. Lukasiewicz a arătat că sistemul lui Frege poate fi înlocuit cu unul mai simplu care are la bază aceiași operatori (—, $\rightarrow$). El conține trei scheme de axiome și regula modus ponens.

Sch. Ax_1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Sch. Ax_2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Sch. Ax_3 $(\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Fiecare schemă de axiome desemnează o mulțime infinită de axiome. (Substituția este înlocuită prin aplicarea schemelor, totuși deosebirea este mai mult o subtilitate teoretică, practic neavînd un rol deosebit).

c) *Sistemul lui Russell*. Conține în plus față de sistemul lui Hilbert și Ackermann axioma:

$$(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))$$

Or, această axiomă aşa cum a arătat Paul Bernays este superfluă. Regulile sînt a substituţiei şi modus ponens.

d) *Sistemul lui Alonzo Clurch.* Acest sistem conţine un operator ($\rightarrow$) şi o constantă f (fals). Regulile sînt a substituţiei şi modus ponens.

$$Ax_1 \quad p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$Ax_2 \quad (s \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((s \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow q))$$

$$Ax_3 \quad ((p \rightarrow f) \rightarrow f) \rightarrow p.$$

e) *Sistemul lui Nicod.* J. Nicod a construit un sistem cu o singură axiomă şi cu un singur operator (incompatibilitatea notată /).

$$Ax. \quad (p/(q/r))/((s/(s/s))/((t/q)/((p/t)/(p/t))))$$

Pe lîngă regula substituţiei admite regula $\dfrac{A,\ A/(B/C)}{C}$.

11. OBSERVAŢII CU PRIVIRE LA SIMBOLISM

a. Constantele 1 şi 0. Introducerea cifrelor 1 şi 0 pentru adevăr şi respectiv fals deschide, aşa după cum am văzut în cazul minimizării, anumite posibilităţi pentru formulare de noi metode de rezolvare. În acelaşi timp noi putem defini mai concis funcţiile logice şi formula anumite legi într-un mod analog cu cel din algebra numerică.

Definiţii

$$p \cdot q = \min(p,\ q)$$

$$p \vee q = \max(p,\ q)$$

$$\bar{p} = 1 - p$$

$$p \rightarrow q = \max(\bar{p},\ q)$$

Legi

$p^n = p$ (idempotenţa „produsului”, adică a conjuncţiei)
$np = p$ (idempotenţa sumei, adică a disjuncţiei)

b. Scrierea lui Lukasiewicz. Am văzut că Lukasiewicz a introdus sistemul de notare a operatorilor prin N, K, A, C, E, D (incompatibilitate), I (excludere): N*p*, K*pq*, A*pq*, E*pq*, D*pq*, I*pq*. Această scriere prezintă pentru început anumite dificultăţi de citire. De exemplu, formula $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ care este una din axiomele lui Lukasiewicz se scrie: CC*pq*CC*qr*C*pr*. Pentru a putea citi această expresie procedăm de la dreapta spre stînga: considerăm argumentele *pr*, apoi C*pr*, argumentele *q*, *r*, apoi C*qr*, la rîndul lor C*pr* şi C*qr* formează argumente pentru CC*qr*C*pr*, urmează apoi C*pq* şi în fine întreaga expresie are ca argumente aceste două implicaţii. Putem folosi provizoriu parantezele.

Fie CCCKA*pqr*A*pq*C*prq*

C[C[CK(A*pq*)*r*(A*pq*)](C*pr*)]*q*

Transcriem începînd cu implicaţia din dreapta:

$$((((p \vee q) \cdot r) \to (p \vee q)) \to (p \to r)) \to q$$

Iată şi expresii pentru forme normale:

KA*pq*A*p*N*q*AN*pq*

AK*pq*K*p*N*q*KN*pq*

Legi:

[1] C*pp*, E*pp*
[2] CK*pq*K*qp*
[3] CA*pq*A*qp*
[4] NK*p*N*p*
[5] A*p*N*p*
[6] ENK*pq*AN*p*N*q*
[7] ENA*pq*KN*p*N*q*
[8] C*p*C*qp*
[9] CN*p*C*pq*
[10] EK*p*K*qr*KK*pqr*
(11) EA*p*A*qr*AA*pqr*
(12) EK*p*A*qr*AK*pq*K*pr*
(13) AE*p*K*qr*KA*pq*A*pr*
(14) EK*p*A*pqp*
(15) EA*p*K*pqp*
(16) CK*pqp*
(17) CK*pqq*
(18) CKC*pq*C*qr*C*pr*
(19) CC*pq*CN*q*N*p*
(20) CKC*pqpq*.

III

LOGICA PREDICATELOR

1. SIMBOLISM

Pînă acum nu am intrat în structura internă a propozițiilor elementare. Simbolismul și aparatul logic introdus pînă aci nu este totuși suficient pentru a studia raționamente mai complicate cum sînt cele de tip silogistic. Într-adevăr, considerînd silogismul

Toate coniferele sînt plante
Bradul este un conifer

Bradul este o plantă

el poate fi simbolizat cu ajutorul simbolismului propozițional astfel $(p \cdot q) \rightarrow r$, ceea ce evident, nu este o lege logică. Este nevoie să pătrundem în structura acestor propoziții. Conform logicii generale propoziția „Toate coniferele sînt plante" constă din a) subiect („conifere"), b) predicat („plante"), c) copula („sînt"), d) cantitatea („toate"). Simbolic TS — P. Într-o judecată care are la bază schema S — P („S este P") termenii S și P desemnează ceva determinat, de ex. S poate desemna un individ sau o însușire, iar P o însușire. O însușire poate să fie și subiect, iar un individ poate fi *numai* subiect. De exemplu, „Liviu Rebreanu" este un termen individual care poate juca numai rol de subiect, dar termenul „om" poate fi și subiect și predicat. În judecata „oamenii sînt muritori", termenul „om" este subiect, dar în judecata „Socrate" este om", termenul „om" este predicat. Posibili-

tatea ca o noţiune să joace rol de subiect sau de predicat este unul din principiile care guvernează silogistica aristotelică. Se poate proceda şi altfel: putem considera o logică în care subiecte sînt numai *indivizii*, iar predicate numai însuşirile (şi relaţiile). În acest caz vom avea următoarea schemă logică „individul x are însuşirea F".

Convenim să notăm indivizi oarecare cu $x, y, z, \ldots$ şi însuşirile cu F, G, H, ... Atribuirea unei însuşiri individului va fi notată cu F(x) sau simplu cu Fx. Semnele $x, y, z, \ldots$ şi F, G, H, ... sînt variabile şi anume primele sînt *variabile individuale*, iar celelalte *variabile predicative*. Indivizii determinaţi pot fi notaţi cu $a, b, c \ldots$ Mulţimea indivizilor la care se raportează variabilele individuale va fi numită *domeniu de semnificaţie* al acestor variabile. Schema „Fx" va fi numită schemă de funcţie propoziţională. Dacă în locul lui F punem predicate determinate, ex. „OM", „Plantă", obţinem funcţii propoziţionale: Om(x), Plantă (x), ceea ce se citeşte „x este om", „x este plantă". Schema Fx se citeşte în genere „F de x" (sau chiar „x este F"). Funcţia propoziţională nu este încă propoziţie dar ea poate fi transformată în propoziţie fie prin substituţia variabilei, fie prin specificarea extinderii însuşirii (proprietăţii) asupra indivizilor.

În general din Fx se obţin scheme de propoziţii individuale ca Fa, Fb, Fc, (prin substituţie), scheme de propoziţii de existenţă (corespunzătoare cu propoziţiile particulare) scrise astfel $\exists x$ Fx (citeşte „există x astfel că Fx") şi scheme de propoziţii generale scrise astfel $\forall x$ Fx (citeşte „pentru orice x, F de x")*). Cînd o propoziţie se referă la *cel puţin un individ* se numeşte „propoziţie existenţială" şi se spune că funcţia propoziţională este „cuantificată existenţial", semnul „$\exists$" numindu-se *cuantor existenţial*. Cînd propoziţia se referă la orice individ x ea se numeşte „propoziţie generală" (universală) şi se spune că funcţia propoziţională este „cuantificată universal", semnul $\forall$ numindu-se *cuantor universal*. De exemplu, funcţia „Om (x)" devine prin $x \equiv$ Napoleon propoziţia „Om (Napoleon)", prin cuantificare existenţială „$\exists x$ Om (x)", iar prin cuantificare universală „$\forall x$ Om (x)".

*) În loc de $\forall x$ se mai poate scrie $\cap x$, $\wedge x$, (x), Πx, Ax, iar în loc de $\exists x$ se mai folosesc semnele $\cup x$, $\vee x$, Ex, Σx.

Prin urmare la simbolismul propoziţional se adaugă lista de simboluri şi expresii predicative:

1. $x, y, z, \ldots$ variabile individuale; $a, b, c,$ $x_1, y_1, \ldots x_2, y_2, \ldots$ constante individuale.
2. F, G, H, ... variabile predicative,
3. Fx, Fy, scheme de funcţii propoziţionale.

De notat este că printre predicate vor fi introduse şi relaţiile. Astfel „$x > y$" va fi considerată ca un predicat de x şi y şi se va scrie „$>$ (x, y)" (citeşte „mai mare de x şi y").
Vom avea deci noi scheme de funcţii propoziţionale.

4. F(x, y), G(x, y, z), H(x, y, z, u), (În funcţie de numărul variabilelor individuale vom avea predicate monadice, diadice şi în general n-adice).
5. *Fa*, *Fb*, *Fc*, ... scheme de propoziţii individuale,
6. $\exists x$ Fx, $\exists y$ Gy, ... scheme de propoziţii existenţiale,
7. $\forall x$ Fx, $\forall y$ Gy, ... scheme de propoziţii universale.

Schemele 3—7 se vor numi propoziţionale. Schemele propoziţionale pot forma noi expresii în combinaţie cu expresiile din logica propoziţiilor (sau fără acestea) prin aplicarea operatorilor propoziţionali. Deoarece regulile pentru formarea unor astfel de expresii sînt ceva mai complicate, preferăm să definim sistematic noţiunea de „formulă" (sau „expresie logică") în limbajul predicatelor.

Reguli de formare a expresiilor (formulelor).

1. Orice variabilă propoziţională va fi expresie (formulă).
2. Orice aplicare a unei variabile predicative la una sau mai multe variabile individuale va fi expresie (formulă), cu alte cuvinte orice schemă de funcţie propoziţională (ex. Fx, G(x•y), ...) va fi expresie.
3. Dacă A este expresie $\bar{A}$ va fi expresie.
4. Dacă A(x) este o expresie A care conţine variabila x necuantificată (liberă) atunci $\exists x$A(x) şi $\forall x$A(x) vor fi expresii*)
5. Dacă A şi B sînt expresii atunci A•B, A$\vee$B, A $\rightarrow$ B, A $=$ B etc. sînt expresii cu condiţia că în ele una şi aceeaşi variabilă nu va apare într-o parte liberă şi în alta cuantificată (liberă fiind atunci cînd e necuantificată).

*) A(x): citeşte „A de x" sau „Formula A care conţine pe x".

Conform cu cele de mai sus vor fi expresii (formule)

$$p,\ q,\ r, \qquad \bar{p},\ \bar{q},\ \bar{r}, \qquad Fx,\ G(x, y),$$

$$\overline{Fx},\ \overline{G(x, y)}, \qquad p \cdot Fx,\ p \cdot \overline{Fx},\ \ldots,\ p \vee \overline{Fx},$$

$$Fx \cdot Hy, \qquad \forall x Fx \cdot \forall y \overline{Hy},\ \forall x \exists y G(x, y)$$

Partea din formulă la care se referă un cuantor va fi numită *domeniul* de acțiune al cuantorului. Există și o restricție pentru domeniul de acțiune: o variabilă nu se poate afla în același timp sub acțiunea ambilor cuantori (universal, existențial). Dacă după aplicarea cuantorului nu se deschide o paranteză atunci domeniul cuprinde numai schema propozițională fără operatori propoziționali binari care urmează, dacă se deschide o paranteză domeniul ține pînă la perechea ei.
Ex. în $\forall x\, Fx \cdot Gy$, domeniul lui $\forall x$ este Fx, iar în $\forall x\, (Fx \cdot Gy) \vee \vee Hz$ domeniul este $(Fx \cdot Gy)$. În formula $\forall x((Fx \rightarrow Gx) \vee \vee \overline{Hx}) \rightarrow \exists y Gy$, domeniul cuantorului universal este $((Fx \rightarrow \rightarrow Gx) \vee \overline{Hx})$, iar al cuantorului existențial este Gy. Următoarele formule sînt exemple de formule necorecte.

$\forall x \exists x G(x, y)$ ($\forall, \exists$ au același domeniu și leagă aceeași variabilă).

$\forall x \exists y G(x, y) \cdot H(x, y)$ (cele două variabile apar în prima parte a conjuncției ca legate, în timp ce în a doua apar libere). Church, Kleene, Moisil ș. a. nu admit aceste două restricții.

2. PROBLEME RELATIVE LA CUANTORI

a. Raporturi între cuantori. Vom nota o formulă care conține o variabilă x prin $A(x)$ — citește „A care conține pe x" — iar dacă conține mai multe variabile și toate sînt de interes va fi notată prin $A(x, y)$, $A(x, y, z)$, ... Între expresiile cuantificate se pot stabili următoarele echivalențe logice importante.

(1) $\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$

(2) $\forall x \overline{A(x)} = \overline{\exists x A(x)}$

(3) $\exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}$

(4) $\exists x \overline{A(x)} = \overline{\forall x A(x)}$

Aceste echivalente sînt generalizări ale legilor lui de Morgan. Generalizările se bazează pe două relații fundamentale între operatorii (•, ∨) și resp. cuantorii (∀, ∃).

(5) $\forall x A(x) = A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot \ldots \cdot A(x_n) \cdot \ldots$

(6) $\exists x A(x) = A(x_1) \vee A(x_2) \vee \ldots \vee A(x_n) \vee$

Dacă domeniul de semnificație al variabilelor individuale este finit atunci punctele de cotinuitate de la sfîrșit pot fi omise. Formula (5) spune că „pentru orice x are loc $A(x)$" este echivalentă cu „conjuncția asertiunilor care se referă la fiecare individ în parte". In caz particular, o universală ca „Toți oamenii sînt muritori" este echivalentă cu „x_1 este muritor și x_2 este muritor și ... și x_n este muritor" (unde x_1, x_2 sînt indivizi umani determinați).
Formula (6) spune că „există x astfel că $A(x)$" este echivalentă cu disjuncția asertiunilor corespunzătoare despre individ". Astfel, „$\exists x$ Sportiv (x)" este echivalentă cu „x_1 este sportiv sau x_2 este sportiv sau ... sau x_n este sportiv".

Pentru a generaliza formulele lui de Morgan vom presupune că domeniul de semnificație al variabilelor individuale are numai doi indivizi: x_1, x_2. Dacă în locul lui p și q din legile lui de Morgan vom substitui respectiv $A(x_1)$ și $A(x_2)$ vom obține:

(7) $\overline{A(x_1) \cdot A(x_2)} = \overline{A(x_1)} \vee \overline{A(x_2)}$

(8) $\overline{A(x_1) \vee A(x_1)} = \overline{A(x_1)} \cdot \overline{A(x_2)}$

Dacă în formula (7) înlocuim conjuncția cu expresia cuantificată universal (conform cu (5)), iar în (8) înlocuim disjuncția cu expresia cuantificată existențial (conf. cu (6)), obținem:

$$\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{(Ax)} \text{ și } \overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$$

de unde generalizînd la infinit în raport cu x obținem formulele (2) și (4).

În mod analog se obțin formulele (1) și (3) generalizînd:

(9) $A(x_1) \cdot A(x_2) = \overline{\overline{A(x_1)} \vee \overline{A(x_2)}}$ și

(10) $A(x_1) \vee A(x_2) = \overline{\overline{A(x_1)} \cdot \overline{A(x_2)}}$

(două cazuri particulare ale legilor lui de Morgan).

b. Poziția și ordinea cuantorilor. Într-o formulă, cuantorii pot să ocupe diferite locuri. Cînd toți cuantorii se află în față, de exemplu, $\forall x \forall y A(x, y)$, $\exists x \exists y A(x, y)$, $\forall x \exists y A(x, y)$, grupul lor poartă numele de „prefixul formulei". Prefixul formulei $\forall x \forall y A(x, y)$ este grupul $\forall x \forall y$. Dacă prefixul este format din cuantori de același fel (de exemplu, $\forall x \forall y$, $\exists x \exists y$) el se numește *omogen*, în caz contrar (de ex., $\forall x \exists y$) se numește *eterogen*. Domeniul unui prefix este tot restul formulei. Deci cuantorii aflați în prefix au același domeniu de acțiune. Într-un prefix omogen ordinea cuantorilor este indiferentă, cu alte cuvinte un asemenea prefix este comutativ. Acest fapt se exprimă în echivalențele:

(11) $\forall x \forall y A(x, y) = \forall y \forall x A(x, y)$

(12) $\exists x \exists y A(x, y) = \exists y \exists x A(x, y)$.

Într-un prefix eterogen, ordinea nu este indiferentă. În loc de echivalență avem aici o implicație:

(13) $\exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$

(cu alte cuvinte, trecerea este permisă numai în sensul arătat de această formulă). Dacă spunem „există un număr natural x astfel că pentru orice număr y are loc $x > y$" putem să trecem la „pentru orice număr natural y există un număr x astfel că $x > y$" (prima afirmație fiind falsă, a doua adevărată).

Trecerea inversă nu este posibilă, (vezi, adevărul nu implică falsul).

c. Distributivitatea în calculul predicatelor. Proprietatea distributivității și inversa ei (scoaterea ca simbol comun) reapar în legătură cu formulele cuantificate. În cazul în care are loc atît distributivitatea cît și inversa ei, legea care le exprimă va avea forma echivalenței. În cazul cînd are loc numai una din aceste proprietăți, legea care o exprimă are forma implicației. Vom avea echivalențele:

(14) $\forall x(A(x) \cdot B(x)) = \forall x A(x) \cdot \forall x B(x)$

(15) $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

Deci cuantorul universal este distributiv (şi poate fi scos ca simbol comun) faţă de conjuncţie. La fel, cuantorul existenţial faţă de disjuncţie.

(16) $\exists x(A(x) \cdot B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \cdot \exists x B(x))$

(17) $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

Cuantorul existenţial este distributiv faţă de conjuncţie (16), iar cel universal are proprietatea inversă distributivităţii în raport cu disjuncţia (17).

(18) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$

(19) $(\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$.

Cuantorul universal este distributiv faţă de implicaţie (18), iar cel existenţial are proprietatea inversă în raport cu implicaţia (19).

d. Dualitatea cuantorilor. Ca şi operatorii $(\cdot, \vee)$ cuantorii $(\forall, \exists)$ aflaţi în strînsă legătură cu aceşti operatori sînt duali. Dacă o formulă A este formată numai cu operatori din mulţimea $(-, \cdot, \vee, \forall, \exists)$ o formulă A^* obţinută din A prin înlocuirea fiecărui operator cu dualul său (deci şi a cuantorilor care sînt tot un fel de operatori) va fi numită duala lui A. Astfel, duala formulei $\exists x \forall y(Fx \cdot \overline{Gy}) \vee Hx)$ este formula $\forall x \exists y((Fx \vee \overline{Gy}) \cdot Hx)$.

Ca urmare vom generaliza principiile de dualitate din calculul propoziţiilor, adică, le reamintim:

(20) Dacă A este lege logică atunci A^* este lege logică.

(21) Dacă $A \equiv B$ este lege logică atunci $A^* \equiv B^*$ este de asemenea lege logică,

(22) Dacă $A \rightarrow B$ este lege logică atunci $B^* \rightarrow A^*$ este lege logică.

Formulele (1) şi (3), (2) şi (4), (5) şi (6), (7) şi (8), (9) şi (10), (11) şi (12), (14) şi (15) constituie perechi de formule duale în sensul regulii (21), iar formulele (16) şi (17), (18) şi (19) sînt duale în sensul regulii (22). Pentru regula (20) dăm ca exemplu formulele:

(23) $\forall x(A(x) \vee \overline{A(x)})$

(24) $\overline{\exists x(A(x) \cdot \overline{A(x)})}$

e. Cum negăm o expresie cuantificată? O expresie cuantificată se neagă conform cu echivalentele 1—4: se înlocuieşte

cuantorul cu dualul său și se pune negația pe domeniul de acțiune. Dacă cuantorii formează un prefix restul formulei se neagă conform cu regulile din logica propozițiilor (în general formula care urmează după prefix se comportă ca o formulă a calculului propozițiilor). Negația formulei $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ este $\exists x(\overline{Fx \rightarrow Gx})$, adică mai departe $\exists x(Fx \cdot \overline{Gx})$, iar negația formulei $\exists x(Fx \vee Gx)$ este $\forall x(\overline{Fx \vee Gx})$, adică (conform cu o lege a lui de Morgan) $\forall x(\overline{Fx} \cdot \overline{Gx})$.

3. CUM REDĂM EXPRESII DE FORMA A, E, I, O ÎN LIMBAJUL PREDICATELOR?

În logica generală simbolurile A, E, I, O reprezintă respectiv judecățile de forma: Toți S sînt P, Nici un S nu e P, Unii S sînt P și Unii S nu sînt P. Aceste judecăți stau la baza silogisticii lui Aristotel. În logica predicatelor există expresii echivalente (reciproc implicative) cu acestea:

(25) Toți S sînt P $= \forall x(Sx \rightarrow Px)$

(26) Nici un S nu este P $= \forall x(Sx \rightarrow \overline{Px})$

(27) Unii S sînt P $= \exists x(Sx \cdot Px)$

(28) Unii S nu sînt P $= \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$.

De notat este că variabilele S, P reprezintă în silogistica aristotelică *termeni generali și cu sferă nevidă*. Dimpotrivă, variabilele F, G, H, pot să fie și cu sferă vidă. Prin urmare, nu vom considera variabilele S, P de același tip cu variabilele F, G, H, ci doar ca un caz particular al acestora. La rîndul lor simbolurile →, · sînt *aci* simple prescurtări pentru „dacă ... atunci" și resp. „și", nu reprezintă funcții de adevăr. (Există și alte considerații, ca de exemplu, neutralitatea în raport cu extensiunea și intensiunea a variabilelor S, P dar aceste considerații nu joacă vreun rol în acest context). La rîndul lor expresia $\forall x(Sx \rightarrow Px)$ și celelalte din dreapta echivalențelor sînt numai cazuri particulare ale formulelor generale corespunzătoare din calculul predicatelor, adică $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ etc., anume acele cazuri cînd F și G sînt termeni generali cu sferă nevidă. Concluzia care se impune de aici este că nu tot ce e valabil pentru judecățile A, E, I, O va fi valabil și pentru

formulele din calculul predicatelor deşi rămîne valabil pentru echivalentele lor date în (25)—(28).

Echivalenţele (25)—(28) trebuie considerate ca nişte *meta-echivalenţe* avînd în vedere că el raportează expresii din două sisteme logice deosebite (silogistica şi logica predicatelor.) Exemplificăm echivalenţele de mai sus. „Toţi oamenii sînt muritori" devine „Pentru orice x dacă x este om atunci el este muritor", „Nici un număr iraţional nu este natural" devine „Pentru orice x dacă x este număr iraţional atunci x nu este număr natural" (sau „este număr ne-natural)", „Unele numere întregi sînt naturale" devine „Există x astfel că este număr întreg şi x este număr natural", „Unele numere reale nu sînt raţionale" devine„Există x astfel că x este număr real şi x nu este număr raţional". Se poate spune că redarea raţionamentelor din limbajul natural în limbajul predicatelor este problema numărul unu a analizei logice moderne a gîndirii intuitive. Ea este de o importanţă capitală pentru analiza logică şi formalizarea teoriilor ştiinţifice.
(În fine, observăm că dacă $\rightarrow$,• sînt luate în semnificaţia abstractă logic-matematică atunci în locul echiv. (25)—(28) avem cel puţin implicaţii).

4. FORME NORMALE

Noţiunea de formă normală din calculul propoziţiilor se poate generaliza şi la calculul predicatelor.

Dacă o formulă A din calculul predicatelor este transformată într-o formulă B astfel că B = A, în B nu apar alţi operatori decît cei din mulţimea (•, V, —, $\forall$, $\exists$), iar negaţia (dacă există) cade numai pe variabilele predicative şi propoziţionale, atunci B se numeşte *redusa* lui A.

O formă redusă este formă normală dacă a) nu conţine cuantori şi este o formă normală booleeană sau dacă b) cuantorii formează un prefix şi domeniul de acţiune al prefixului este în forma normală booleeană.

De exemplu, formula $\exists x \exists y(\overline{Fx} \vee Gy)$ este o formă normală pentru $\forall x Fx \rightarrow \exists y Gy$

Forma normală prezentată aci este numită „prenexă". Aducerea unei expresii la forma normală prenexă trebuie să ţină seama de regulile de scoatere a cuantorilor în prefix. Regulile de aducere la forma normală sînt următoarele:

(a) Dacă expresia este fără cuantori se procedează exact ca în calculul propozițiilor,

(b) Dacă conține cuantori se redenumesc variabilele în așa fel încît fiecare cuantor să lege o variabilă diferită, se scot cuantorii în față în ordinea în care ei apar în formulă, iar domeniul de acțiune este adus la una din formele normale booleene.

Regula de redenumire. O variabilă legată poate fi înlocuită cu o altă variabilă (care după înlocuire va apărea de asemenea legată) în întreg domeniul de acțiune din care ea face parte, cu condiția ca după înlocuire să se obțină din nou formulă.

Exemplu. Să se aducă la forma normală expresia $\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx$. Eliminăm implicația: $\overline{\forall x Fx} \vee \exists x Gx$. Coborîm negația pe variabila predicativă: $\exists x \overline{Fx} \vee \exists x Gx$. Redenumim pe x din partea a doua a disjuncției (punînd în locul său pe y): $\exists x \overline{Fx} \vee \exists y Gy$ (redenumirea putea fi aplicată la prima parte). Scoatem cuantorii în față și obținem forma normală: $\exists x \exists y (\overline{Fx} \vee Gy)$.

Datorită formei normale noi putem considera simultan o clasă de propoziții (de aceeași formă normală), și de asemenea formula care urmează, după prefix poate fi considerată ca o formulă a logicii propozițiilor.

Teoremă. Oricărei formule îi corespunde o formă normală echivalentă cu ea. (vezi demonstrația în Novikov. Elemente de logică matematică". pp. 150—153).

În afară de forma normală definită mai sus există o formă normală specială, denumită, după numele celui care a introdus-o, *forma normală Skolem.*

O formulă este formă normală Skolem dacă ea este o transformare a formei normale (prenexe) în așa fel că nici un cuantor existențial (dacă există) nu urmează după vreun cuantor universal. Forma normală Skolem nu este neapărat echivalentă cu formula inițială ci ele se află într-o altă relație care poartă numele de *echivalență deductivă.* Echivalența deductivă se definește în raport cu un grup de axiome M astfel că dacă

$$M, A \vdash B \text{ și } M, B \vdash A$$

atunci A este deductiv echivalentă cu B. Dacă $A \equiv B$ atunci A este deductiv echivalentă cu B.

Problema deciziei în calculul predicatelor este mult mai complicată decît în calculul propozițiilor. Nu există o procedură generală cu ajutorul căreia să putem decide dacă o expresie este lege logică sau nu.

De remarcat este că noțiunea de identic-adevărat corespunde aci cu aceea de universal-adevărat, adică adevărat pentru nu importă care valoare individuală din universul indivizilor.

Expresia $\forall x(Fx \vee \overline{Fx})$ este universal adevărată, expresia $\exists x(Fx \cdot \overline{Fx})$ este universal falsă, dar expresia $\forall x(Fx \vee Gx)$ poate doar să fie realizabilă pentru o clasă limitată de indivizi. Deoarece nu avem un procedeu asemănător formelor normale în care să spunem după forma expresiei dacă este sau nu universal adevărată, problema este abordată aci în două feluri a) axiomatic, b) este redusă la cazuri particulare.

După numărul de variabile individuale, diferite, la care se aplică o variabilă predicativă expresia va fi denumită monadică (cu o singură variabilă individuală), diadică (cu două) sau, în genere, n-adică. Fragmentul din logica predicatelor se va numi corespunzător „logica predicatelor n-adice" ($n = 1, 2, \ldots, m$). Asemănător întrucîtva cu rezolvarea din calculul propozițiilor există o rezolvare în calculul predicatelor monadice.

Regulă de rezolvare. Dacă o formulă monadică este realizabilă pe o mulțime M de indivizi, ea este de asemenea realizabilă pe o mulțime M′ cu maximum 2^n indivizi, unde n este numărul de predicate pe care-l conține formula respectivă.

Fie formula $\forall x(\overline{Fx} \rightarrow Gy)$. Dacă ea este realizabilă (este satisfăcută) pe o mulțime M atunci ea este realizabilă și pe o mulțime cu 2^2 elemente (căci formula conține două predicate F și G). Putem aduce expresia la forma normală pentru a ușura considerațiile. Variabilele libere pot fi cuantificate universal. Dacă notăm predicatele cu $P_1, P_2, \ldots P_n$ și variabilele individuale cu $x_1, x_2, \quad x_m$ atunci vom avea expresia:

$$(q_1)(q_1) \quad (q_m)A(P_1, \quad P_n, x_1, \quad x_m)$$

unde $q_1, \ldots q_m$ reprezintă cuantificarea universală sau existențială a variabilelor individuale respective, $P_1 \ldots P_n$ predi-

catele, iar $x_1 \ldots x_m$ variabilele conținute de aceste predicate (monadice). Demonstrația se bazează pe corespondența care se stabilește între elementele mulțimii M și M' (fiecărui element din M i se pune în corespondență un element din M' care face parte din aceeași clasă cu el). În acest fel se definește o funcție pe mulțimea M care ia valori din M'. *Deoarece M' este o parte a lui M, formula care va fi adevărată în M va fi adevărată și pe submulțimea M' a lui M.* (Ne limităm aci la evidență, demonstrația poate fi găsită în lucrarea lui P. S. Novikov).

Regulă derivată. Dacă o formulă A (monadică) este universal adevărată pe o mulțime care conține cel mult 2^n valori individuale atunci ea este universal adevărată.

Natura elementelor este indiferentă, ceea ce contează este pur și simplu numărul de 2^n. Fie, de exemplu, formula $\forall x(Fx \vee \overline{Fx})$. Fie M mulțimea numerelor naturale (1, 2, ...) și M' mulțime oarecare de 2^n (unde n = 1), deci de 2 elemente (două numere naturale). Putem presupune arbitrar că, avem mulțimea (3,7). Predicatul F fie „par". Propoziția noastră este „pentru orice x (x număr natural) x este par sau x nu este par". De observat este că aci cuantorul $\forall$ are acțiune limitată (nu întreg universal indivizilor, ci o parte — șirul numerelor naturale). În general se poate vorbi de cuantori cu acțiune limitată, „cuantori mărginiți" și ei pot fi notați de exemplu prin $\forall \hat{x}$, $\exists \hat{x}$ (citește „pentru toți acei x" și respectiv „există acei x", unde în locul lui „acei x" se presupun elemente dintr-o mulțime determinată, exemplu: „numere", „ființe vii" etc.).

Formula de mai sus poate fi scrisă și astfel

$$\forall \hat{x} \, (Fx \vee \overline{Fx}).$$

În cazul nostru vom avea „$\forall \hat{x}$(Par(x) $\vee$ Impar (x))". Această formulă este adevărată pentru oarecare cîmp de 2 elemente, de exemplu (3,7) și deci ea este adevărată în genere. Pentru cazul nostru avem:

$$\text{Par } (3) \vee \text{Impar } (3)$$

$$\text{Par } (7) \vee \text{Impar } (7)$$

În ce priveşte predicatele n-adice ($n > 1$) nu există reguli generale de decizie, deşi există anumite teoreme de asemenea cu acţiune limitată. S-ar putea pune problema reducerii predicatelor n-adice la cele monadice, ceea ce în anumite cazuri se şi face. Prin aceasta nu înseamnă că ele sînt inutile căci există mulţimi şi anume cele *infinite* care nu pot fi caracterizate numai prin predicate monadice (proprietăţi ale elementelor) ci sînt necesare predicate n-adice (relaţii între elemente).

Mai mult, unele formule sînt realizabile pe o mulţime infinită dar nu pe o mulţime finită, de exemplu formula:

$$\forall(x, y, z)\exists u\ [F(x, x)\cdot(\bar{F}(x, y)\rightarrow(\bar{F}(y, z)\rightarrow\bar{F}(x, z)))\cdot\bar{F}(x, u)]$$

În vederea economiei de scriere atunci cînd cuantori de acelaşi tip urmează unul după altul în prefix noi putem adopta convenţiile:

$$\forall x_1\forall x_2 \quad \forall x_n \equiv \forall(x_1, x_2, \quad x_n)$$

$$\exists x_1\exists x_2 \quad \exists x_n \equiv \exists(x_1, x_2 \dots x_n)$$

În legătură cu realizabilitatea formulelor pe mulţimi infinite se demonstrează următoarea teoremă.

Teorema lui Löwenheim. Dacă o formulă este realizabilă într-o mulţime infinită (oarecare) ea este realizabilă şi într-o mulţime numărabilă (adică o mulţime biunivoc-corespondentă cu şirul numerelor naturale)*. •

6. RELAŢII ÎNTRE SILOGISTICĂ ŞI LOGICA PREDICATELOR

Mai sus am indicat deja echivalentele în logica predicatelor pentru judecăţile A, E, I, O. Conform cu echivalenţele indicate silogistica (bazată pe aceste judecăţi) este echivalentă cu un fragment al logicii predicatelor monadice. Chiar din cele spuse în paragraful consacrat problemei deciziei rezultă că 1) problema deciziei poate fi rezolvată pentru silogistică, 2) silogistica este adecvată numai pentru studierea unor teorii referitoare la mulţimile finite, dar nu infinite.

* Despre decizie vezi mai pe larg în [22] şi [28].

În cele ce urmează, vom reda modurile silogismului cu ajutorul aparatului predicatelor monadice. Ca semn al deducției vom utiliza $\vdash$.

Fig. I.

Barbara : $\forall x(Mx \rightarrow Px), \forall x(Sx \rightarrow Mx) \vdash \forall x(Sx \rightarrow Px)$

Celarent : $\forall x(Mx \rightarrow \overline{Px}), \forall x(Sx \rightarrow Mx) \vdash \forall x(Sx \rightarrow \overline{Px})$

Darii : $\forall x(Mx \rightarrow Px), \exists x(Sx \cdot Mx) \vdash \exists x(Sx \cdot Px)$

Ferio : $\forall x(Mx \rightarrow \overline{Px}), \exists x(Sx \cdot Mx) \vdash \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$

Fig. II.

Cesare : $\forall x(Px \rightarrow \overline{Mx}), \forall x(Sx \rightarrow Mx) \vdash \forall x(Sx \rightarrow \overline{P}x)$

Camestres : $\forall x(Px \rightarrow \overline{Mx}), \forall x(Sx \rightarrow \overline{Mx}) \vdash \forall x(Sx \rightarrow \overline{Px})$

Festino : $\forall x(Px \rightarrow \overline{Mx}), \exists x(Sx \cdot Mx) \vdash \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$

Baroco : $\forall x(Px \rightarrow Mx), \exists x(Sx \cdot \overline{Mx}) \vdash \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$

Fig. III.

Darapti : $\forall x(Mx \rightarrow Px), \forall x(Mx \rightarrow Sx), \exists x Mx \vdash^{*} \exists x(Sx \cdot Px)$

Disamis : $\exists x(Mx \cdot Px), \forall x(Mx \rightarrow Sx) \vdash \exists x(Sx \cdot Px)$

Datisi : $\forall x(Mx \rightarrow Px), \exists x(Mx \cdot Sx) \vdash \exists x(Sx \cdot Px)$

Felapton : $\forall x(Mx \rightarrow \overline{Px}), \forall x(Mx \rightarrow Sx), \exists x Mx \vdash^{*} \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$

Bocardo : $\exists x(Mx \cdot \overline{Px}), \forall x(Mx \rightarrow Sx) \vdash \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$.

Feriso : $\forall x(Mx \rightarrow \overline{Px}), \exists x(Mx \cdot Sx) \vdash \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$
(sau *Ferison*)

Fig. VI.

Bamalip : $\forall x(Px \rightarrow Mx), \forall x(Mx \rightarrow Sx), \exists x Px \vdash^{*} \exists x(Sx \cdot Px)$
(sau *Bramantip*)

Camenes : $\forall x(Px \rightarrow Mx), \forall x(Mx \rightarrow \overline{Sx}) \vdash \forall x(Sx \rightarrow \overline{Px})$
(sau *Calemes*)

Dimaris : $\exists x(Px \cdot Mx), \forall x(Mx \rightarrow Sx) \vdash \exists x(Sx \cdot Px)$
(sau *Dimatis*)

Fesapo : $\forall x(Px \rightarrow \overline{Mx}), \forall x(Mx \rightarrow Sx), \exists x Mx \vdash^{*} \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$

Ferison : $\forall x(Px \rightarrow \overline{Mx}), \exists x(Mx \cdot Sx) \vdash \exists x(Sx \cdot \overline{Px})$

Avem apoi transcrierea formelor singulare în fig. I și II.

Barbara $\forall x(Mx \rightarrow Px),\ Ma \vdash Pa$

Celarent : $\forall x(Mx \rightarrow \overline{Px}),\ Ma \vdash \overline{Pa}$

Cesare: $\forall x(Px \rightarrow \overline{Mx}),\ Ma \vdash \overline{Pa}$

Camestres : $\forall x(Px \rightarrow Mx),\ \overline{Ma} \vdash \overline{Pa}$

Prin schimbarea ordinii premiselor în fig. a IV-a se obțin modurile cu numele respective: *Baralipton*, *Celantes*, *Dabitis*, *Fapesmo* și *Frisesomorum*. (Redarea lor se face de asemenea prin schimbarea ordinii premiselor în deducțiile de mai sus).

Analog sînt redate modurile formate prin subalternarea concluziei la modurile *Barbara*, *Celarent*, *Cesare*, *Camestres*, *Calemes*, adică modurile „slabe" *Barbari*, *Celaront*, *Cesaro*, *Camestros*, *Calemos*. Este important să observăm că în „transcrierile" modurilor la cele însemnate cu $\overset{*}{\vdash}$ se introduce o premisă în plus. Aceasta pentru a preciza caracterul *nevid* al predicatului.

Introducerea existenței (fie ca o supoziție generală care limitează utilizarea variabilelor predicative, fie ca mai sus prin redarea expresă, ex. $\exists x Mx$) ne dă posibilitatea să redăm raporturile din pătratul logic clasic și o serie de inferențe imediate. De exemplu, „dacă A este adevărat atunci I este adevărat" (A $\vdash$ I) poate fi redată:

$$\forall x(Sx \rightarrow Px),\ \exists x Sx \vdash \exists x(Sx \cdot Px).$$

Cazul general:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x(Fx \cdot Gx)$$

nu este adevărat din următoarele motive $Fx \rightarrow Gx$ poate fi adevărată chiar cînd x nu există, or în acest caz afirmația că $\exists x(Fx \cdot Gx)$ este pur și simplu falsă.

Conversiunea „dacă Toți S sînt P atunci Unii P sînt S", redată prin:

$$\forall x(Sx \rightarrow Px),\ \exists x Sx \vdash \exists x(Px \cdot Sx)$$

nu este totuși valabilă în forma:

$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x(Gx \cdot Fx)$ din aceleași motive ca și mai sus. Prin urmare, nu toate raporturile și inferențele bazate pe pătratul logic sînt în general valabile în calculul predicatelor.

Vom expune în continuare calculul axiomatic al predicatelor în varianta Hilbert-Ackermann. La axiomele calculului propozițional se adaugă axiomele:

$$Ax_5 \ \forall x Fx \rightarrow Fy.$$

$$Ax_6 \ Fy \rightarrow \exists x Fx.$$

Ax_5 înseamnă „dacă predicatul F se realizează pentru orice x atunci el se realizează și pentru un x oarecare"; Ax_6 înseamnă: „dacă predicatul F se realizează pentru un y oarecare atunci putem afirma că există x pentru care F se realizează".

Regulile de deducție prime vor fi:

I. Regula modus ponens (formulată ca și în calculul propozițiilor).

II. Regulile substituției

III. Regulile cuantorilor

IV. Regula redenumirii.

II. *Regulile substituției.* Deoarece în logica predicatelor avem trei feluri de variabile (propoziționale, individuale și predicative), vom avea trei reguli de substituție.

IIα) Într-o formulă A putem înlocui o variabilă propozițională cu o formulă B dacă se respectă condițiile: a) variabila propozițională este înlocuită pretutindeni unde apare în A; b) B nu conține variabile individuale libere care sînt legate în A sau variabile individuale legate care în A sînt libere, c) dacă variabila propozițională se află în domeniul de acțiune al unui cuantor, atunci variabila legată de acest cuantor nu se află în B. II$_\beta$) O variabilă individuală liberă poate fi substituită cu orice altă variabilă individuală cu condițiile că: a) substituția se face pretutindeni unde apare variabila în formulă, b) variabila cu care o înlocuim nu apare legată în formula dată.

IIγ) Substituția pentru variabile predicative. Fie o formulă A care conține predicatul F, pe scurt A (F (. . .)). F conține n variabile individuale (libere sau legate). F poate fi înlocuit cu o formulă B care conține cel puțin n variabile libere dacă: a) variabilele libere ale lui B nu apar legate în A, b) variabilele legate ale lui B nu apar libere în A, c) în fiecare caz de apariție a lui F în A variabilele lui F sînt înlocuite numai cu asemenea

variabile care nu apar legate în B*. Această parte a regulii substituției necesită încă unele explicații. Presupunem că F conține un număr n de variabile pe care le notăm astfel x_1, x_2, ... x_n, deci vom avea $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Presupunem apoi că F *apare* de n ori în A și vom nota diferitele sale apariții cu $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Variabilele individuale în diferite *apariții* (fie să zicem F_i, F_j), pot fi asemenea sau diferite. Formula B conţine cel puțin n variabile *libere* pe care convenim să le ordonăm astfel $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ pe scurt $B(y_1, y_2, \ldots y_n \ldots)$ unde y_i și y_j pot fi și identice.

Substituția se produce astfel: a) stabilim pentru fiecare F_i o corespondenţă astfel că oricărui x_i îi corespunde un singur y_i (acela care are acelaşi indice), b) înlocuim în B pe fiecare y_i cu corespondentul său x_i; c) formula B_j astfel obținută adică $B_i(x_1, x_2, \quad x_n \ldots)$ poate fi pusă în locul lui F_i.

Exemplu. Să desemnăm prin A formula $\forall x \exists y(F(x, y) \rightarrow F(x, z))$, iar prin B formula $\exists n(H(n, t) \cdot H(n, s))$. Să se substituie B în locul lui F. Vedem că B satisface condițiile impuse pentru a putea fi substituit (F conține două variabile, iar B două variabile *libere*). F apare de două ori: $F_1(x, y)$, $F_2(x, z)$; vom avea în genere $F_i(x_1, x_2)$. Pentru $F_1(x_1, x_2)$, $x_1 \equiv x$, iar $x_2 \equiv y$; pentru $F_2(x_1, x_2)$, $x_1 \equiv x$, iar $x_2 \equiv z$. În formula B avem variabilele n, t, n, s deci $B(n, t, n, s)$. Ordonăm variabilele libere din B astfel că $y_1 \equiv t$, $y_2 \equiv s$. Stabilim corespondenţa între $B(y_1, y_2, \ldots)$ și $F_i(x_1, x_2)$:

$$F_1(x, y) \;-\; B(t, s, \ldots)$$

$$F_2(x, z) \;-\; B(t, s, \ldots)$$

Înlocuim în B variabilele cu corespondentele lor din F_i și obținem respectiv $B_1(x, y, \ldots)$ și $B_2(x, z, \ldots)$, adică, revenind la formula pe care o reprezintă B vom avea: $\exists n(H(n, x) \cdot H(n, y))$ și respectiv $\exists n(H(n, x) \cdot H(n, z))$ formule pe care le vom substitui în A respectiv în locul lui F_1 și F_2 și vom obține: $\forall x \exists y(\exists n(H(n, x) \cdot H(n, y)) \rightarrow \exists n(H(n, x) \cdot H(n, z)))$

* În ediția 1938 a cărţii lui Hilbert și Ackermann condiția c) lipsește

III. *Regulile cuantorilor*

III α) Din $A \to B(x)$ se deduce $A \to \forall x B(x)$ (x este liber în B și nu apare în A);

III β) Din $B(x) \to A$ se deduce $\exists x B(x) \to A$ (x este liber în B și nu apare în A).

IV. *Regula redenumirii.* O variabilă legată poate fi înlocuită cu o altă variabilă (care după înlocuire va apărea, de asemenea legată), în întreg domeniul de acțiune din care ea face parte, cu condiția ca după înlocuire să se obțină din nou formulă și ca noua variabilă legată să nu apară liberă în formula inițială*

V. *Regulă* (*derivată*). Dacă formula $A(x)$ (unde x este liber) este demonstrabilă, atunci $\forall x A(x)$ este demonstrabilă. Secvența demonstrativă este următoarea:

$$A(x)$$

$$A(x) \vee \overline{p \vee \bar{p}}$$

$$\overline{p \vee \bar{p}} \vee A(x)$$

$$(p \vee \bar{p}) \to A(x)$$

$$(p \vee \bar{p}) \to \forall x A(x)$$

$$\forall x A(x)$$

Această regulă corespunde afirmației că dacă $A(x)$ este valabilă pentru un x *oarecare* (arbitrar ales) ea este valabilă *în general* ($\forall x A(x)$).

VI. *Regulă* (*derivată*). Fie o formulă $A(x_1, x_2,$ $x_m, y_1, y_2, \dots y_n)$ unde x_i sînt variabile libere, iar y_j sînt variabile legate. Variabilele x_i pot fi înlocuite cu alte variabile z_i, iar y_j, cu variabile u_j astfel ca locurile în care stau variabile identice să fie puse variabile identice, iar locurile în care stau variabile diferite să fie puse variabile diferite. (Demonstrația regulii se face prin substituție și redenumire).

Exemplu. În $\forall x \exists y (F(x, y) \vee G(x, z))$ vom înlocui pe x și y respectiv cu t și s, iar pe z cu u și vom obține $\forall t \exists s (F(t, s) \vee$ $\vee G(t, u))$.

* Această condiție lipsește de asemenea în ediția din 1938. Fără această condiție din $\exists x (x \neq y)$ s-ar obține $\exists x (x \neq x)$.

Teoreme.

Teorema 1. $\forall x(Fx \vee \overline{Fx})$. Această formulă nu este altceva decît terțul exclus generalizat. Pornim de la $p \vee \bar{p}$ (formulă deja demonstrată). Substituim p cu Fx și obținem:

$$Fx \vee \overline{Fx}$$

Aplicăm apoi regula care spune că dacă $A(x)$ e demonstrată atunci $\forall x A(x)$ e demonstrată și obținem:

$$\forall x(Fx \vee \overline{Fx})$$

Teorema 2. $\forall x Fx \rightarrow \exists x Fx$ (Se demonstrează din Ax_6 și Ax_5),

Teorema 3. $\forall x(A \vee Fx) \rightarrow A \vee \forall x Fx$. În Ax_6 operăm $F/A \vee Fz$ (reg. IIγ):

$$\forall x(A \vee Fx) \rightarrow (A \vee Fy)$$

Operăm în această formulă $A/\bar{\bar{A}}$:

$$\forall x(\bar{\bar{A}} \vee Fx) \rightarrow (\bar{\bar{A}} \vee Fy)$$

Aplicăm definiția implicației și regula substituirii de echivalente:

$$\forall x(\bar{A} \rightarrow Fx) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow Fy)$$

Conform cu regula X (calc. propozițiilor):

$$\forall x((\bar{A} \rightarrow Fx) \cdot \bar{A}) \rightarrow Fy$$

De aci prin III α):

$$\forall x((\bar{A} \rightarrow Fx) \cdot \bar{A}) \rightarrow \forall y Fy$$

Redenumim pe y cu x (reg. IV):

$$\forall x((\bar{A} \rightarrow Fx) \cdot \bar{A}) \rightarrow \forall x Fx$$

Aplicăm regula X (calc. propozițiilor):

$$\forall x(\bar{A} \rightarrow Fx) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \forall x Fx)$$

Prin definiția implicației și substituirea de echivalente obținem:

$$\forall x(\bar{\bar{A}} \vee Fx) \rightarrow (\bar{\bar{A}} \vee \forall x Fx).$$

Suprimăm dubla negație:

$$\forall x(A \vee Fx) \rightarrow (A \vee \forall x Fx) \text{ q.e.d.}$$

Teorema 4. $\forall x(A \rightarrow Fx) \rightarrow (A \rightarrow \forall x Fx)$ (Se obține din Th. 3).

VII. ***Regulă.*** Dacă formula $A \rightarrow (B \rightarrow C(x))$ este demonstrabilă atunci este demonstrabilă și formula $A \rightarrow (B \rightarrow \forall x C(x))$.

Supoziție: $A \rightarrow (B \rightarrow C(x))$

$(A \cdot B) \rightarrow C(x)$ (reg. X calc. prop.)

$(A \cdot B) \rightarrow \forall x C(x)$ (reg. IIIα)

$A \rightarrow (B \rightarrow \forall x C(x))$ (reg. X calc. prop.)

(Se consideră că A şi B nu conțin variabila x).

Teorema 5. $A \rightarrow \forall x(A \vee Fx)$.

Se obține din $p \rightarrow (p \vee q)$ prin substituții și reg. III.

Teorema 6. $\forall x(A \vee Fx) = A \vee \forall x Fx$ (Se descompune într-o conjuncție de implicații după care se poate demonstra utilizînd Ax_5, reg. IV (calc. pred.), reg. X (calc. propoz.), III (calc. pred.).

Teorema 7. $\forall x(A \rightarrow Fx) = A \rightarrow \forall x Fx$ (se dem. din Th. 6).

Teorema 8. $\forall x(A \cdot Fx) = A \cdot \forall x Fx$.

Se descompune în două implicații:

a) $\forall x(A \cdot Fx) \rightarrow (A \cdot \forall x Fx)$; b) $(A \cdot \forall x Fx) \rightarrow \forall x(A \cdot Fx)$

Dem. lui a) Secvență demonstrativă (cititorul urmează să indice singur regulile aplicate).

$\forall x(A \cdot Fx) \to (A \cdot \forall x Fx)$.

$\forall y(A \cdot Fy) \to (A \cdot Fx)$.

$(A \cdot Fx) \to Fx$

$\forall y(A \cdot Fy) \to Fx$

$\forall x(A \cdot Fx) \to \forall x Fx$

$(A \cdot Fx) \to A$

$\forall x(A \cdot Fx) \to A$

Se aplică $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \cdot r)))$ şi regula modus ponens consecutiv şi se obţine formula dorită.

b) $(A \cdot \forall x F(x) \to \forall x(A \cdot Fx)$.

$\forall y Fy \to Fx$

$A \cdot \forall y Fy \to A \cdot Fx$.

$(A \cdot \forall x Fx) \to \forall x(A \cdot Fx)$.

Din a) şi b) se obţine Th. 8.

Teorema 9. $\forall x \forall y F(x, y) = \forall y \forall x F(x, y)$.

$\forall x \forall y F(x, y) \to \forall y \forall x F(x, y)$

$\forall z \forall u F(z, u) \to \forall u F(x, u)$ (din Ax_5).

$\forall u F(x, u) \to F(x, y)$ (din Ax. 5)

$\forall z \forall u F(z, u) \to F(x, y)$

$\forall z \forall u F(z, u) \to \forall x F(x, y)$

$\forall x \forall y F(x, y) \to \forall y \forall x F(x, y)$

Analog se obţine şi $\forall y \forall x F(x, y) \to \forall x \forall y F(x, y)$

Teorema 10. $\forall x(Fx \cdot Gx) = (\forall x Fx \cdot \forall x Gx)$.

a) $\forall x(Fx \cdot Gx) \to (\forall x Fx \cdot \forall x Gx)$

$\forall y(Fy \cdot Gy) \to (Fx \cdot Gx)$

$(Fx \cdot Gx) \to Fx$

$(Fx \cdot Gx) \to Gx$

$\left.\begin{array}{l}\forall y(Fy \cdot Gy) \to Fx \\ \forall y(Fy \cdot Gy) \to Gx\end{array}\right\}$ din acestea se obţine respectiv:

$\left.\begin{array}{l}\forall x(Fx \cdot Gx) \to \forall x Fx \\ \forall x(Fx \cdot Gx) \to \forall x Gx\end{array}\right\}$ din acestea:

$\forall x(Fx \cdot Gx) \to (\forall x Fx \cdot \forall x Gx)$

b) $(\forall x Fx \cdot \forall x Gx) \rightarrow \forall x(Fx \cdot Gx)$

$\forall y Fy \rightarrow Fx$

$\forall y Gy \rightarrow Gx$

$(\forall y Fy \cdot \forall y Gy) \rightarrow (Fx \cdot Gx)$

$(\forall x Fx \cdot \forall x Gx) \rightarrow \forall x(Fx \cdot Gx)$

Din a) şi b) se obţine Th. 10.

Teorema **11.** $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx)$

$\forall y(Fy \rightarrow Gy) \rightarrow (Fx \rightarrow Gx)$

$Fx \rightarrow (\forall y(Fy \rightarrow Gy) \rightarrow Gx)$

$\forall y Fy \rightarrow Fx$

$\forall y Fy \rightarrow (\forall y(Fy \rightarrow Gy) \rightarrow Gx)$

$\forall y Fy \cdot \forall y(Fy \rightarrow Gy) \rightarrow Gx$

$\forall x Fx \cdot \forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x Gx$

$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx)$

Teorema **12.** $\forall x(Fx = Gx) \rightarrow (\forall x Fx = \forall x Gx)$

Demonstraţie. Înlocuim echivalenţele cu implicaţii reciproce:

$\forall x((Fx \rightarrow Gx) \cdot (Gx \rightarrow Fx))$ etc. Apoi din Th. 10.

$\forall x((Fx \rightarrow Gx) \cdot (Gx \rightarrow Fx)) = (\forall x(Fx \rightarrow Gx) \cdot \forall x(Gx \rightarrow Fx))$

Din *Teorema* **11**:

$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx)$

$\forall x(Gx \rightarrow Fx) \rightarrow (\forall x Gx \rightarrow \forall x Fx)$

Ţinînd seama că avem trei formule de tipul:

$$A = (B \cdot C)$$

$$B \rightarrow (D \rightarrow E)$$

$$C \rightarrow (E \rightarrow D)$$

putem deduce din ele $A \rightarrow (D = E)$ ceea ce reprezintă formula noastră.

Teorema **13.** Această teoremă se referă la raporturile de echivalență dintre expresiile cuantificate:

$$\exists x Fx = \overline{\forall x \overline{Fx}} \text{ etc.}$$

Să dăm demonstrația acesteia. O descompunem în două:

a) $\exists x Fx \rightarrow \overline{\forall x \overline{Fx}}$

$\forall y \overline{Fy} \rightarrow \overline{Fx}$

$\overline{\overline{Fx}} \rightarrow \overline{\forall y \overline{Fy}}$

$Fx \rightarrow \overline{\forall y \overline{Fy}}$

$\exists x Fx \rightarrow \overline{\forall x \overline{Fx}}$

b) $\overline{\forall x \overline{Fx}} \rightarrow \exists x Fx$

$Fx \rightarrow \exists y Fy$

$\overline{\exists y Fy} \rightarrow \overline{Fx}$

$\overline{\exists x Fx} \rightarrow \forall x \overline{Fx}$

$\overline{\forall x \overline{Fx}} \rightarrow \overline{\overline{\exists x Fx}}$

$\overline{\forall x \overline{Fx}} \rightarrow \exists x Fx$

Exerciții. Să se demonstreze teoremele:

Teorema **14.** $\forall x(Fx \rightarrow Gy) \rightarrow (\exists x Fx \rightarrow \exists x Gx)$

Teorema **15.** $\forall x(Fx \rightarrow A) \rightarrow (\exists x Gx \rightarrow A)$

Teorema **16.** $\exists x \forall y F(x, y) \rightarrow \forall y \exists x F(x, y)$

VIII. *Regulă* (generalizare a regulii schimbului de echivalente) Fie date două formule $A(x, y, \quad u)$ și $B(x, y, \quad u)$ care conțin variabilele libere $x, y, \quad u$ și nu conțin alte variabile libere.

Dacă $A(x, y, \ldots. u) = B(x, y, \quad u)$ este o formulă demonstrabilă și există o formulă C astfel că ea conține pe A (...) ca parte (o dată sau de mai multe ori), iar A(...) conține alte variabile în loc de $x, y, \ldots., u$ și dacă D este o astfel de formulă care se obține din C prin înlocuirea în ea a lui A(...) în unele sau în toate locurile cu B(...), atunci C = D este de asemenea demonstrată*.

Pentru deducția de formule se poate folosi ca regulă principiul dualității despre care am discutat deja mai sus.

8. PROPRIETĂȚILE SISTEMULUI AXIOMATIC AL PREDICATELOR

Pentru demonstrarea acestor proprietăți vom urmări ca și în cazul calculului propozițiilor îndeaproape textul lui Hilbert și Ackermann.

* Formulare după [16].

a. Necontradicția. Pentru a demonstra că sistemul expus mai sus este necontradictoriu se dovedește că toate formulele axiome sau teoreme posedă o proprietate pe care nici o altă formulă corectă a calculului nu o posedă. În acest scop ne slujim de următorul procedeu: a) nesocotim cuantorii și variabilele individuale, b) tratăm variabilele predicative ca variabile propoziționale, c) formulele astfel obținute vor deveni toate formule ale logicii propozițiilor, ale căror variabile vor lua semnificații din mulțimea (1,0) (unde $0 \neq 1$), d) orice axiomă sau teoremă va lua valoarea 1 și nu valoarea 0. Dacă lucrurile stau astfel atunci sistemul este necontradictoriu.

Pentru axiomele Ax_1 — Ax_4 proprietatea este deja demonstrată. Fie Ax_5. $\forall x Fx \rightarrow Fy$. Ea devine prin procedeul de mai sus $F \rightarrow F$. Ax_6 $Fy \rightarrow \exists x\, Fx$ de asemenea devine $F \rightarrow F$. Or, s-a demonstrat în logica propozițiilor că $p \rightarrow p$ este o teoremă, prin urmare $F \rightarrow F$ va fi teoremă și deci va avea valoarea 1.

Mai departe urmează să arătăm că regulile de deducție transformate corespunzător duc de la formule cu valoarea 1 numai la formule cu valoarea 1.

Deoarece am suprimat variabilele individuale și cuantorii aplicarea lor se reduce la simpla repetiție a formulei sau la aplicarea regulilor din logica propozițiilor. Regula modus ponens rămîne neschimbată, regula substituției se reduce la cea din calculul propozițiilor, regulile cuantorilor se transformă în simple repetiții, adică:

$$\frac{A \rightarrow B(x)}{A \rightarrow \forall x B(x)} \text{ devine } \frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow B}$$

$$\text{iar } \frac{B(x) \rightarrow A}{\exists x B(x) \rightarrow A} \text{ devine } \frac{B \rightarrow A}{B \rightarrow A}$$

regula redenumirii de asemenea se reduce la o simplă repetiție, ca de exemplu în cazul:

$$\frac{\forall x Fx \rightarrow Fy}{\forall z Fz \rightarrow Fy} \text{ care devine } \frac{F \rightarrow F}{F \rightarrow F}$$

(A nu se confunda bara acestor reguli cu negația. Vezi și m. d.)

În legătură cu această demonstrație de necontradicție se ridică o problemă. Domeniul din care iau valori formulele noastre este finit (respectiv fiecare formulă ia valoarea 1). Ce se întîmplă dacă introducem premise cu domenii infinite? (De exemplu, axiome matematice.) Nu devine sistemul necontradictoriu? Pentru a rezolva această problemă Hilbert și Bernays au construit o teorie specială (*vezi Grundlagen der Mathematik*).

b. **Independența.** Se cere acum să demonstrăm că nici una din axiomele Ax_1 — Ax_6 și regulile indicate nu sînt de prisos.

1. Axiomele 1—4. În calculul propozițiilor aceste axiome sînt independente (ele nu devin de prisos chiar atunci cînd se ia o axiomă suplimentară cum e cazul în sistemul lui Russell, sau o altă axiomă ca $p \rightarrow p$). Pentru a demonstra că nici în cazul de față ele nu sînt de prisos, operăm din nou o „reducere" a calculului predicatelor la calculul propozițiilor în același mod în care am procedat mai sus. Ambele axiome predicative Ax_5 și Ax_6 devin $F \rightarrow F$, or ele nu se pot deduce din $F \rightarrow F$ și deci nici dintr-o axiomă suplimentară cum e $p \rightarrow p$. Regulile de deducție suferă aceleași transformări ca și în cazul necontradicției.

2. Independența Ax_5 și Ax_6.

Procedeu. Pentru a demonstra independența Ax_5 se înlocuiește pretutindeni în formula considerată expresia de forma $\forall x A(x)$ cu expresia de forma $\forall x A(x) \vee p \vee \bar{p}$. De exemplu, formula $\forall x \; (A \cdot Fx) \rightarrow (A \cdot \forall x Fx)$ devine prin transformarea indicată $(\forall x(A \cdot Fx) \vee p \vee \bar{p}) \rightarrow (A \cdot (\forall x Fx \vee p \vee \bar{p}))$. Expresiile înlocuite sînt $\forall x(A \cdot Fx)$ și respectiv $\forall x Fx$. În acest caz orice formulă care se poate deduce din Ax_1 — Ax_4 și Ax_6 devine din nou formulă deductibilă din aceleași axiome după transformarea amintită. Dimpotrivă, Ax_5 devine prin transformarea amintită $(\forall x Fx \vee p \vee \bar{p}) \rightarrow Fy$, formulă care nu mai este totdeauna adevărată. Într-adevăr, membrul întîi al implicației, adică $(\forall x Fx \vee p \vee \bar{p}) = 1$ (deoarece disjuncția conține un membru adevărat $p \vee \bar{p}$) în timp ce Fy poate fi adevărat sau fals. Dacă $Fy = 0$ atunci formula devine $1 \rightarrow 0 = 0$. Pentru a demonstra independența axiomei Ax_6 vom înlocui orice parte de forma $\exists x A(x)$ cu $\exists x A(x) \cdot p \cdot \bar{p}$. Toate for-

mulele deduse din $Ax_1 — Ax_5$ se vor deduce și în acest caz, dimpotrivă Ax_6 (adică $Fy \rightarrow \exists xFx$, nu este deductibilă deoarece ea devine: $Fy \rightarrow (\exists xFx \cdot p \cdot \bar{p})$. Avînd în vedere că $p \cdot \bar{p} = 0$, $(\exists xFx \cdot p \cdot \bar{p}) = 0$. Or $Fy = 1$ sau $Fy = 0$. Cînd $Fy = 1$, vom avea $1 \rightarrow 0 = 0$.

Regula substituției. α). Se arată că există o formulă care nu poate fi dedusă fără regula IIα), de exemplu $\forall xFx \rightarrow \exists xFx$. β). Eliminăm variabila z dintre variabilele individuale astfel că vom obține de exemplu din $F(x, z)$ pe Fx, iar din Gz pe G. În acest caz toate formulele care au fost demonstrate fără această regulă II_{β}) vor fi demonstrate și de astădată, în timp ce formula $\forall x\, Fx \rightarrow Fz$ care se obține din Ax_5 prin y/z devine o formulă indemonstrabilă, adică $\forall xFx \rightarrow F$.

γ). Înlocuim în formulă orice parte de forma $\forall x\, A(x)$ care conține predicatul G cu formula $\forall xA(x) \vee p \vee \bar{p}$. Orice formulă demonstrabilă fără II_{γ}) devine din nou demonstrabilă în timp ce $\forall xGx \rightarrow Gy$ devine $\forall x(Gx \vee p \vee \bar{p}) \rightarrow Gy$ ceea ce nu se deduce, căci $p \vee \bar{p} = 1$ și deci $(Gx \vee p \vee \bar{p}) = 1$, iar $Gy = 1$ sau $Gy = 0$. Cînd $Gy = 0$ implicația devine $1 \rightarrow$ $\rightarrow 0 = 0$.

Regulile cuantorilor. α). Înlocuim pe $\forall xA(x)$ din formule cu $\forall xA(x) \cdot p \cdot \bar{p}$. Formula $\forall x(Fx \vee \overline{Fx})$ demonstrabilă cu ajutorul acestei reguli devine $\forall x(Fx \vee \overline{Fx}) \cdot p \cdot \bar{p}$ care este indemonstrabilă deoarece $p \cdot \bar{p} = 0$, iar $\forall x(Fx \vee \overline{Fx}) \cdot 0 = 0$.

β). Înlocuim în formule partea de forma $\exists xA(x)$ cu $\exists xA(x) \vee$ $\vee\, p \vee \bar{p}$. Formula $\overline{\exists x(Fx \cdot \overline{Fx})}$ demonstrabilă cu ajutorul acestei reguli devine $\overline{\exists x(Fx \cdot \overline{Fx})} \vee p \vee \bar{p}$, ceea ce nu mai poate fi dedus. Într-adevăr, $\overline{\exists x(Fx \cdot \overline{Fx})} \vee p \vee \bar{p}$ este echivalentă cu $\exists x(Fx \cdot \overline{Fx}) \rightarrow (p \vee \bar{p})$, formulă ce se obține din $(Fx \cdot \overline{Fx}) \rightarrow$ $(p \vee \bar{p})$ prin aplicarea regulii III_{β}).

Regula redenumirii. Eliminăm din formulă variabila legată z. Prin această transformare formula $\forall zFz \rightarrow Fx$ demonstrabilă prin redenumire devine $F \rightarrow Fx$, ceea ce nu mai este demonstrabil. Redăm cele de mai sus într-un tabel sinoptic:

Axioma sau regula	Proprietatea	Procedeul	Rezultat
Ax_5, Ax_6	Necontradicţia	Eliminăm cuantorii şi variab. individ.	Ele devin $F \to F$, dar Ax_5 şi Ax_6 ca atare nu se pot deduce din aceasta
Reg. subst. Regulile cuantorilor şi regula redenumirii			Se reduce la regula subst. din calc. prop. Devin simple repetiţii
Ax_5	Independ.	Partea de forma $\forall x A(x)$ se înlocuieşte cu $\forall x\, A(x) \vee \vee p \vee \bar{p}$	Ax_5 devine $(\forall x F x \vee p \vee \bar{p}) \to F y$ care nu este universal adev.
Ax_6		$\exists x A(x)$ se înlocuieşte cu $\exists x A(x) \cdot \cdot p \cdot \bar{p}$	Ax_6 devine $F y \to (\exists x A(x) \cdot p \cdot \bar{p})$ care nu este univ. adevărată
Regula $II_{\alpha)}$		Formula $\forall x\; F x \to \to \exists x\; F x$ nu poate fi dedusă fără $II_{\alpha)}$	
Regula $II_{\beta)}$	Independent	Eliminăm pe z.	$\forall x F x \to F z$ nu poate fi dedusă
Regula $II_{\gamma)}$		$\forall x\; A(x)$ care conţine G e înlocuit cu $\forall x\; A(x) \vee p \vee \bar{p}$	$\forall x G x \to G y$ devine indemonstrabilă
Regula $III_{\alpha)}$		$\forall x A(x)$ se înlocuieşte cu $\forall x A(x) \cdot \cdot p \cdot \bar{p}$	$\forall x(F x \vee \bar{F} x)$ devine $\forall x(F x \vee \bar{F} x) \cdot p \cdot \bar{p}$ si deci indemonstrabilă
Regula $III_{\beta)}$		$\exists x A(x)$ se înlocuieşte cu $\exists x A(x) \vee \vee p \vee \bar{p}$	Formula $\overline{\exists x(F x \cdot \overline{F x})}$ demonstrabilă cu ajutorul reg. III devine apoi indemonstrabilă
Regula IV		Eliminăm pe z cînd este legat	Formula $\forall z\; F z \to F x$ demonstrabilă prin IV, devine $F \to F x$ nedemonstrabilă.

c. **Completitudinea.** Calculul predicatelor nu este complet în sensul în care acest lucru a fost definit în legătură cu calculul propozițiilor. Într-adevăr, există o formulă indemonstrabilă $\exists x Fx \rightarrow \forall x Fx$ (ea este falsă de îndată ce domeniul lui x este mai mare de un element) formulă care anexată la sistemul de axiome amintit nu-l transformă totuşi în sistem contradictoriu. Într-adevăr, dacă după anexarea acestei formule încercăm să demonstrăm necontradicția prin procedeul de mai sus nu vom obține o contradicție, căci ea devine ca şi cele două axiome $F \rightarrow F$ (după eliminarea cuantorilor şi variabilelor).

Hilbert şi Ackermann dau o procedură pur formală de demonstrație a imposibilității de a deduce această formulă. a) Se leagă variabilele libere din formule prin $\forall$ care se aşază în fața întregii formule, b) se înlocuiesc expresiile de forma $\forall x$ $A(x)$ şi $\exists x A(x)$ respectiv cu $A(1) \cdot A(2)$ şi $A(1) \vee A(2)$ (unde 1,2 sînt nume de obiecte individuale). Vom avea acum pe lîngă variabilele p, q, r, ... formele $F(1)$, $F(2)$, $G(1, 2)$, ... pe care le înlocuim cu diferite variabile propoziționale, astfel că în ultimă instanță avem peste tot numai variabile propoziționale. În acest caz orice formulă demonstrabilă a logicii predicatelor devine o formulă identic-adevărată a logicii propozițiilor. Demonstrația se face pe rînd pentru axiome reguli.

Ax_5. Prin procedura indicată $\forall x Fx \rightarrow Fy$ devine $\forall y(\forall x Fx \rightarrow \rightarrow Fy)$. Eliminînd pe $\forall x$ obținem $\forall y((F(1) \cdot F(2)) \rightarrow Fy)$, apoi prin eliminarea lui y obținem $[(F(1) \cdot F(2)) \rightarrow F(1)] \cdot [(F(1) \cdot F(2)) \rightarrow \rightarrow F(2)]$. Înlocuim termenii $F(\ldots)$ prin variabilele propoziționale: $((p \cdot q) \rightarrow p) \cdot ((p \cdot q) \rightarrow q)$, ceea ce este o lege a logicii propozițiilor.

Ax_6. $Fy \rightarrow \exists x Fx$ devine $\forall y(Fy \rightarrow \exists x Fx)$. Eliminînd pe rînd cuantorii după procedeul de mai sus, obținem:

$$\forall y(Fy \rightarrow (F(1) \vee F(2)) \text{ şi apoi}$$

$$[F(1) \rightarrow (F(1) \vee F(2))] \cdot [F(2) \rightarrow (F(1) \vee F(2))]$$

De unde: $(p \rightarrow (p \vee q)) \cdot (q \rightarrow (p \vee q))$ ceea ce este o lege logică.

Aplicarea regulilor de deducție conservă proprietatea indicată.

Regula substituției. α). Dacă în locul variabilei propoziționale avem de pus o formulă predicativă, prin procedeul dat mai sus ea devine o formulă a logicii propozițiilor care se substituie după regula indicată acolo. β) Variabilele individuale dispărînd formula obținută prin substituție II_β) devine o simplă repetiție •γ) Regula se reduce la cea din calculul propozițiilor.

Regulile III revin la reguli din calculul propozițiilor. Regula IV devine o simplă repetiție. Regula modus ponens aplicată la formulele predicative se transformă după cum urmează:

$$\frac{A(x),\ A(x) \rightarrow B(x)}{B(x)}$$

$$\frac{\forall x\, A(x),\ \forall x(\forall(x) \rightarrow B(x))}{\forall x\ B(x)}$$

$$\frac{A(1) \cdot A(2),\ (A(1) \rightarrow B(1)) \cdot (A(2) \rightarrow B(2))}{B(1) \cdot B(2)}$$

$$\frac{p \cdot q,\ (p \rightarrow r) \cdot (q \rightarrow s)}{r \cdot s}$$

Ultima este o regulă a logicii propozițiilor. În acest fel s-a dovedit că orice formulă adevărată a logicii predicatelor devine propoziție adevărată a logicii propozițiilor. Formula $\exists x Fx \rightarrow \rightarrow \forall x Fx$ nu are această proprietate. Prin transformare ea devine $(F(1) \vee F(2)) \rightarrow (F(1) \cdot F(2))$, adică $(p \vee q) \rightarrow (p \cdot q)$, ceea ce nu este lege logică. Prin urmare, în sensul strict de mai sus sistemul axiomatic al predicatelor nu este complet. Dar completitudinea poate fi definită și în alt sens. Pentru aceasta vom apela la noțiunea de formulă universal valabilă. Hilbert și Ackermann definesc în felul următor această noțiune „O formulă a calculului predicatelor se numește *universal-valabilă* dacă, independent de aceea care este domeniul indivizilor, prin orice substituție a variabilelor respective cu propoziții, nume de indivizi din domeniul dat și predicate ale acestor indivizi ea devine propoziție adevărată". Un sistem este complet dacă în el pot fi deduse toate formulele universal valabile construibile în acest sistem. Demonstrația acestui fel de com-

pletitudine a fost dată de Kurt Gödel. Această demonstrație se folosește de forma normală Skolem și de o interpretare în domeniul numerelor naturale. Kurt Gödel a dovedit că fiecărei formule universal-valabile îi corespunde o formă normală Skolem care este deductibilă din sistemul de axiome. Conform cu echivalența deductivă dacă A și B sînt deductiv echivalente și dacă una din ele este adevărată cealaltă va fi de asemenea adevărată:

$$\frac{M, A \vdash B;\ M, B \vdash A,\ A}{B}$$

$$\frac{M, A \vdash B;\ \ M, B \vdash A, B}{A}$$

Din cele de mai sus rezultă că dacă orice formă normală Skolem universal valabilă se deduce din axiomele predicatelor, atunci sistemul este complet.

Teorema lui Gödel despre completitudine. Orice formulă universal valabilă a logicii predicatelor este demonstrabilă în acest calcul (Cititorul dispune în limba română de demonstrația acestei teoreme în „Elemente de logică matematică". de P.S. Novikov).

9. EXTINDEREA LOGICII PREDICATELOR

Logica predicatelor expusă mai sus are unele particularități: a) ea folosește numai predicate de indivizi, b) variabilele predicative nu sînt cuantificate, c) operatorii pentru variabile se reduc la cuantori. Totuși există mai multe căi de a dezvolta logica predicatelor: 1) introducerea operatorului descripției (ιx) și a operatorului abstracției (λx), 2) introducerea predicatelor de predicate, 3) cuantificarea predicatelor.

a) Operatorul descripției. Expresii de felul: „Acel scriitor care este autorul romanului *Ion*" sau „acel matematician care este autorul geometriei absolute", se numesc *expresii descriptive.* În general ele au forma „acel individ care este . . .". Pentru a reprezenta în logica predicatelor termeni sau propoziții cu subiect de formă descriptivă se introduce pe lîngă

variabilele individuale un nou operator — *operatorul descripției.* Acest operator se notează cu litera grecească ι (iota). Vom introduce, de asemenea, semne pentru predicate individuale (descriptive): f_1, f_2, (sau altfel). Vom avea termeni de forma:

$$(\iota x)f_1x \text{ („acel } x \text{ astfel că } f_1 \text{ de } x\text{”).}$$

Predicatele f_1, f_2, sînt definitorii pentru x astfel că numai un x are predicatul f_i. Se spune în acest caz că descripția are proprietatea unicității. Dacă vom scrie (ιx) Om (x) este evident că această expresie nu se bucură de unicitate (căci nu există numai un x care să aibă proprietatea *Om*). Dar expresia „(ιx) x este autorul romanului «*Mizerabilii*»” trimite la un singur individ (Victor Hugo). Expresiile descriptive pot fi termeni ai unei propoziții dar ele nu sînt propoziții (cu toate că ele au o parte propozițională). Pentru a reprezenta propozițiile cu subiect individual putem introduce pentru indivizi determinați semnele x_1, x_2, ... Dacă x_i este dat printr-o descripție, de exemplu, $(\iota x)f_1x$ atunci putem scrie în loc de Hx_1: $H((\iota x)f_1x)$ („acel x care este f_1 este H”), sau pur și simplu $H(\iota x)f_1x$. Există o întreagă teorie a descripției și mai multe metode de tratare.

b. Operatorul abstracției (λx). Există un tip de expresii plurale care delimitează nu indivizi ci clase de indivizi. Ele au forma „acei x astfel că Fx”. De exemplu, „acei indivizi care sînt locuitori ai orașului București”. Ele abstractizează (izolează) prin proprietatea indicată o clasă de obiecte. În vederea reprezentării unor astfel de expresii se introduce un operator special (λx) („acei care”) numit λ— operator sau operatorul abstracției. Vom avea termeni abstracți de forma (λx) Fx „acei x astfel că F de x”); (λx) Om (x), (λx) Animal (x) ș.a. Putem scrie λxFx. Dacă după expresia $(\lambda x)Fx$ vom pune o constantă individuală, de ex. x_1, atunci vom obține $\lambda xFxx_1$, expresia care înseamnă „acei indivizi care au însușirea F și x_1 este un astfel de individ”. Altfel spus $\lambda xFxx_1$ desemnează același lucru ca și Fx_1. Trecerea de la expresia „$\lambda xFxx_1$” la „Fx_1” și invers poartă numele de λ- conversiune. Bazat pe această conversiune și pe operația de compunere, Alonzo Church a construit calculul λ- conversiunii. Operația de compunere este aceea prin care din două expresii A și B obținem

prin simplă alăturare o a treia expresie AB. De exemplu, din F și x obținem Fx. (Calculul λ-conversiunii face parte din logica combinatorie).

c. **Cuantificarea predicatelor.** Uneori vrem să arătăm că o formulă are loc pentru orice semnificație a variabilelor predicative, pentru nici una sau pentru unele. În acest caz se impune să cuantificăm și variabilele predicative. De exemplu, formula Fx nu devine adevărată nici pentru orice x, nici pentru orice F deși pot fi alese semnificații ale lui x și F pentru care ca devine adevărată. Vom scrie deci: $\exists F \exists x Fx$ („există F și există x pentru care F de x", ceea ce înseamnă: „există predicate de indivizi și există indivizi pentru care au loc asemenea predicate"). Dacă vrem să spunem că orice relație de echivalență este simetrică vom scrie: $\forall R(\forall x \forall y\ (R(x, y) = \forall F\ (Fx = Fy)) \rightarrow \forall x \forall y R(x, y) \rightarrow R(y, x))$.

d. **Predicate de predicate.** În logica predicatelor studiată pînă aci am făcut o separație netă între ideea de subiect și predicat, ca și între subiect și propoziție. Știm însă că în gîndirea intuitivă înseși propozițiile și predicatele pot deveni obiecte pentru noi propoziții. Astfel în propoziția „Socrate este om", termenul „om" joacă un rol de predicat, iar în propoziția „toți oamenii sînt muritori" termenul „om" joacă rol de subiect. Posibilitatea de a transforma predicatul în subiect în cadrul aceleiași teorii logice este unul din principiile silogisticii aristotelice. La rîndul lor propozițiile pot deveni subiect. Exemplu, propoziția ,,Socrate este om,, devine subiect pentru propoziția „«Socrate este om» este propoziție adevărată" (avem aci o propoziție despre altă propoziție). Dacă vrem să spunem că o relație este tranzitivă (de exemplu, implicația) atunci acest lucru nu va putea fi făcut numai cu ajutorul limbajului utilizat pînă aci cu toate că *neexplicit* putem formula ideea de tranzitivitate astfel:

$$\forall x \forall y \forall z((xRy \cdot yRz) \rightarrow xRz)$$

Pentru a spune explicit că aceasta este definiția tranzitivității și nu o formulă oarecare din calculul predicatelor vom introduce predicatul *Trans* (prescurtare de la tranzitivitate):

$$\text{Trans}\ (R) \equiv \forall x \forall y \forall z((xRy \cdot yRz) \rightarrow xRz)$$

Este necesară deci introducerea unor predicate de predicate. Convenim să notăm predicatele de predicate de indivizi cu φ, ψ, χ... Apare astfel o ierarhie a funcțiilor propoziționale în funcție de tipul predicatelor.
Această ierarhie a fost studiată în detaliu de către Bertrand Russel în așa-numita *teorie a tipurilor*. Vom avea o ierarhie a indivizilor și predicatelor (respectiv a simbolurilor corespunzătoare după tip) și a expresiilor după ordin.

Tipul 0: a, b, c , x, y, z,

Tipul 1: F, G, H, , F_1, G_1, H_1,

Tipul 2: φ, ψ, χ, ..., φ_1, ψ_1, χ_1

Regulă de ierarhie. Dacă avem o expresie α care este formată dintr-o serie de semne (numărul lor este obligatoriu finit) și dacă cel mai înalt tip care poate fi determinat clasificînd semnele expresiei are numărul n, atunci expresia α are numărul $n+1$. O schemă de funcție propozițională (fără variabile cuantificate) va fi numită „matrice". Schemele care rezultă din aplicarea variabilelor predicative (tipul 1) la variabilele individuale (tipul 0) vor fi *matrice de ordinul 1*. Ex. F(x), F(y), ... G(x, y), H(x, y, z), ... Prin cuantificarea variabilelor de tipul 0 se obțin expresii de asemenea de ordinul 1. La fel prin substituție. Ordinul doi se va obține prin aplicarea semnelor de tipul 2 la semne sau expresii de tipul 1 și prin cuantificarea variabilelor de tipul 1.

Exemple. $\varphi(G)$, $\varphi(Gx)$, $\psi(H(x, y))$

$$\forall G\ \varphi(G),\ \forall G\ \varphi(Gx),\ \exists\psi\forall x\ \psi(H(x, y))$$

(Dacă se cuantifică numai o parte din variabile expresia poate fi luată ca predicat în raport cu restul variabilelor. Ex. $\forall x F(x,y)$ poate fi scrisă $P(y)$). Fie apoi cazul: $\forall F(Fx = Fy)$. Aci $Fx = Fy$ poate fi prezentată ca un predicat de ordinul 2: $=(Fx, Fy)$. Sau dacă notăm $=$ cu *Echi*, vom scrie *Echi* (Fx, Fy) și mai departe ($\forall$*Echi*) *Echi* (Fx, Fy). Rezultă că logica predicatelor de ordinul doi cuprinde expresii cu predicate de tipul 1 în care variabilele predicative sînt cuantificate, sau expresii cu variabile predicative de tipul 2 în care variabilele de tipul 0 și 1 sînt sau nu cuantificate. (La acest nivel variabilele de tipul doi nu sînt cuantificabile.) Cuantorii se vor extinde de asemenea și asupra variabilelor

propoziţionale (p, q, r, ...). Ca urmare vom obţine (tot în logica predicatelor de ordinul 2) expresii propoziționale cuantificate:

$$\forall p(\overline{p \cdot \bar{p}}).$$

Pe lîngă toate tautologiile logicii propoziţiilor vom putea introduce cuantorul universal astfel că
dacă $A(p, q)$ este o tautologie atunci
$\forall p \forall q A(p, q)$ va fi de asemenea o tautologie. Iată şi o formulă universal valabilă din calculul predicatelor:

$$\forall F \forall x(Fx \vee \overline{Fx}).$$

(„Indiferent care ar fi proprietatea F şi individul x este adevărat sau că individul are proprietatea respectivă sau că n-o are".) Prin cele de mai sus operatorii propoziționali pot fi ei înşişi trataţi ca predicate.

Calculul predicatelor de ordinul doi ne dă posibilitatea să definim în termeni de predicate ideea de număr. În acest caz numărul va apare ca predicat de tipul 2. De exemplu, zero se va defini astfel:

$$Zero\ (F) \equiv \overline{\exists x F x}$$

Apoi: $Unu\ (F) \equiv \exists x(Fx \cdot \forall y(Fy \rightarrow (x \equiv y)))$

IV

CALCULUL NATURAL

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Pînă acum am făcut cunoştinţă cu două moduri de organizare a calculului logic—algoritmic şi axiomatic. Există însă un mod de expunere mai apropiat de gîndirea obişnuită a matematicianului, gîndire prin *supoziţii* (ipoteze). În acest calcul nu apar nici definiţii, nici axiome, ci numai reguli sau „scheme de deducţie". Acest calcul poartă numele de „calcul natural" şi el a fost descoperit cam în acelaşi timp de G. Gentzen şi Stanislaw Jaskowski. Observăm că în calculul natural, exact ca în silogistica lui Aristorel se arată *ce putem deduce* din anumite ipoteze date, fără a ne interesa de faptul dacă ele sînt sau nu demonstrate. Orice schemă de deducţie se reduce în ultimă instanţă la aserţiunea *din anumite presupuneri rezultă o anumită consecinţă.* A găsi ce posibilităţi de deducţie avem în raport cu cutare sau cutare tip de presupuneri (ipoteze, supoziţii) aceasta este sarcina logicii în concepţia calculului natural.

Iată exemplele prin care Gentzen sugerează esenţa calculului natural.

Exemplul 1. $(p \lor (q \cdot r)) \rightarrow ((p \lor q) \cdot (p \lor r))$. Vom raţiona astfel: fie (prin supoziţie) adevărat p sau $p \cdot q$. Considerăm următoarele două cazuri: 1. Este adevărat p.2. Este adevărat $q \cdot r$. În cazul 1 din presupunere rezultă atît $p \lor q$ cît şi $p \lor r$ şi deci este admis şi $(p \lor q) \cdot (p \lor r)$. În cazul 2 are loc $q \cdot r$, adică atît q cît şi r. Din q decurge $p \lor q$, iar din r decurge $p \lor r$, prin urmare din ambele decurge $(p \lor q) \cdot (p \lor r)$. Ca rezul-

tat $(p \vee q)\cdot(p \vee r)$ a fost dedusă din $p \vee (q \cdot r)$, iar formula $(p \vee (q \cdot r)) \rightarrow ((p \vee q)\cdot(p \vee r))$ este adevărată fără nici o presupunere.

Exemplul 2. $\exists x \forall y F(x, y) \rightarrow \forall y \exists x F(x, y)$.

Vom raționa astfel: există un astfel de x încît pentru orice y e adevărat $F(x, y)$. Fie a (arbitrar ales) un astfel de x. Prin urmare, pentru orice y are loc $F(a, y)$. Fie b un y arbitrar ales. Atunci are loc $F(a, b)$. Deci există un oarecarc x, anume a, astfel că are loc $F(x, b)$. Deoarece b este un oarecare această aserțiune are loc pentru toate obiectele, adică pentru orice y există un astfel de x, eă are loc $F(x, y)$. *Q. E. D.*

Exemplul 3. $\overline{\exists x Fx} \rightarrow \forall y \overline{Fy}$ (formula valabilă în logica lui Heyting). Presupunem că nu există un astfel de x pentru care ar avea loc Fx. De aei trebuie să deducem că pentru orice y are loc $\overline{Fy}$. Fie a un oarecare obiect, pentru care Fa are loc. De aci obținem: există x pentru care are loc Fx, şi anume un astfel de x este a. Or, aceasta contrazice propoziția $\overline{\exists x Fx}$. Deci am ajuns la o contradicție, adică Fa nu poate fi adevărat. Deoarece a a fost luat cu totul arbitrar, are loc pentru orice y, $\overline{Fy}$. Q.E.D. La rîndul său Jaskowski prezintă în mod analog demonstrația exemplului următor (el utilizează scrierea lui Lukasiewicz).

Exemplul 4. C*p*CC*pqq* (adică $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$. Presupunem p. Apoi presupunem C*pq*. De aci urmează q. Observăm apoi că q este o consecință a lui C*pq* (prin presupunere) şi obținem că „dacă p implică q, atunci q", adică CC*pqq*. În accst fel avînd presupus p noi am dedus această ultimă propoziție, de unde C*p*C*pqq*. Această ultimă propoziție, arată Jaskowski, nu mai depinde de vreo altă supoziție. Ea va rămîne adevărată chiar cînd supozițiile sînt false. Această deducție este sistematizată de Jaskowski astfcl:

1. S*p* (S înseamnă „supoziție")

1.1. SC*pq*

1.1. *q*

1. CC*pqq*

C*p*CC*pqq*

Exemplul 5. CCNpNqCqp (Jaskowski)

2. SCNpNq

2.1. Sq

2.1.1. SNp

2.1.1. Nq

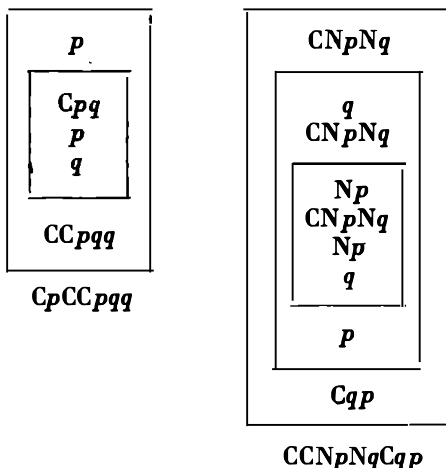
Supoziția „Np" cu prefixul „2.1.1." ne duce la o contradicție constînd din admiterea simultană a lui q și Nq. De aci putem deduce:

2.1. p

2.Cqp

CC NpNqCqp (adică $(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (q \rightarrow p)$)

Tot Jaskowski reprezintă cele două exemple date în felul următor:



Se vede că demonstrația este descompusă în fragmente demonstrative dispuse în dreptunghiurile respective („domenii de supoziție") Se spune, de exemplu, că domeniul supoziției de forma q este clasa ale cărei elemente au formele următoare:

q, 1. SNp, 1. Nq și p

Gentzen dă următorul sistem de reguli de introducere și de eliminare a operatorilor (respectiv a cuantorilor) logici. Pentru comoditate vom utiliza simbolurile lui Lukasiewicz la care se va asocia indicele *i* (introducere) sau *e* (eliminare) în vederea denumirii regulilor. De exemplu, N_i, N_e vor însemna respectiv „introducerea negației" și „eliminarea negației". (Regulile vor fi date în forma în care se scriu modurile silogistice).

$$\frac{A,\ B}{A \cdot B} \quad \frac{A,\ B}{B \cdot A}\ (K_i) \qquad \frac{A \cdot B}{A}, \quad \frac{A \cdot B}{B}\ (K_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ (C_i) \qquad \frac{A,\ A, \rightarrow B}{B}\ (C_e)$$

$$\frac{A}{\overline{\overline{A}}}, \quad \frac{A \rightarrow B}{\overline{B} \rightarrow \overline{A}}\ (N_i) \qquad \frac{\overline{\overline{A}}}{A}, \quad \frac{\overline{B} \rightarrow \overline{A}}{A \rightarrow B}\ (N_e)$$

$$\frac{A}{A \vee B}, \quad \frac{B}{A \vee B}\ (A_i) \qquad \frac{\overline{A},\ A \vee B}{B}\ (Ae)$$

$$\frac{A \vee B,\ A \vdash C,\ B \vdash C}{C}\ (A_e)$$

Cu excepția implicației pentru fiecare operator propozițional am formulat cîte două reguli de introducere și două de eliminare.

$$\frac{A(t)^*}{\forall x A(x)}\ (\forall_i) \qquad \frac{\forall x A(x)}{A(t)}\ (\forall_e)$$

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)}\ (\exists_i) \qquad \frac{\exists x A(x)^*}{A(t)}\ (\exists_e)$$

În ce privește regulile (A_e) ne putem limita la una din două. Gentzen dă următoarele explicații intuitive în legătură cu unele reguli.

(C_i) În cuvinte această regulă poate fi exprimată astfel „Dacă B este demonstrat cu ajutorul presupunerii lui A atunci (fără această presupunere) din A urmează B".
(Se înțelege, arată Gentzen, că ar putea fi făcute alte presupuneri de care acest rezultat să depindă).
(A_e). (Demonstrația prin „descompunere în cazuri").
Dacă e demonstrat A V B atunci se poate demonstra pe cazuri presupunînd mai întîi A (din care deducem C) și apoi B (din care deducem C). Dacă din ambele cazuri (luate în parte) se deduce C, atunci putem spune că cel puțin din unul (adică din A V B) se deduce C. $(\forall_i)$. Dacă este demonstrată formula A(t) unde t este un termen care poate fi substituit în A(x) și este „cu totul arbitrar" atunci putem deduce $\forall x$A(x). Că t este cu totul arbitrar înseamnă că alegerea lui nu depinde de nici o presupunere (în care ar intra t). Această precizare împreună cu cerința ca în A(x) toate aparițiile lui t din A(t) să fie înlocuite cu x reprezintă limitarea necesară impusă regulii $(\forall_i)$. Pe lîngă explicații date de Gentzen sînt utile încă explicațiile de mai jos pentru înțelegerea acestei reguli. Această regulă mai poate fi exprimată și astfel „dacă A(t) a fost demonstrată pentru un t (absolut oarecare în mulțimea de semnificații dată) atunci ea este demonstrată și pentru orice x". În algebră se folosesc adesea astfel de raționamente cînd fără a utiliza cuantorii se presupune că expresiile cu variabile sînt general adevărate. De exemplu:

(a) $$\frac{x \cdot x = x^2}{\forall x(x \cdot x = x^2)}$$

(b) $$\frac{(a = b) \equiv (b = a)}{\forall (a, b)((a = b) \equiv (b = a))}$$

Dacă x n-ar fi oarecare, singura presupunere compatibilă cu demonstrarea lui $x \cdot x = x^2$ (demonstrarea înseamnă „universal valabilitate"), atunci $\forall x(x \cdot x = x^2)$ ar fi evident falsă. Exemplul (a) mai poate să fie scris conform cu regula astfel:

$$\frac{a \cdot a = a^2}{\forall x(x \cdot x = x^2)}$$

Dacă formula este valabilă pentru un a oarecare, ea este valabilă și pentru orice valoare a lui x din același domeniu cu a. Formula $A(a)$: $a \cdot a = a^2$ este rezultatul substituției lui a în $A(x)$, adică în $x \cdot x = x^2$. În caz general, $A(t)$ este rezultat substituirii lui t în $A(x)$. Prin urmare, t precede toate variabilele libere din $A(x)$. O dată ce am aplicat regula $(\forall_i)$ se spune că *limităm* variabila t (care desemnează o variabilă individuală, o constantă individuală sau un termen individual compus). După limitare ea nu mai participă în aplicarea regulii $(\forall_i)$. Dacă în $A \vdash B$ variabila *limitată* ar fi liberă fie în A, fie în B atunci deducția ar fi incompletă.

$(\exists_e)$. Vom raționa, după cum arată Gentzen, astfel: fie t un termen pentru care are loc $A(t)$. (Se înțelege că în calitate de t trebuie să luăm un termen care nu apare ca variabilă în $\exists x A(x)$). Dacă bazîndu-ne pe această presupunere noi dovedim propoziția $\exists x A(x)$ care nu mai conține pe t și nu depinde de presupuneri care-l conțin pe t, ea este dovedită independent de $A(t)$. Limitările de la $(\forall_i)$ sînt valabile și pentru $(\exists_e)$. Celelalte observații în legătură cu raportul dintre t și x făcute mai sus în cazul $(\forall_i)$ sînt valabile și pentru $(\exists_e)$.

3. EXEMPLE DE DEDUCȚIE NATURALĂ

Mai întîi vom arăta cum formalizează Gentzen cu ajutorul regulilor introduse cele trei exemple date inițial.

(1). $(p \vee (q \cdot r)) \rightarrow ((\ \ \vee q) \cdot (p \vee r))$.

$$\dfrac{\dfrac{p \overset{2}{\vee} (q \cdot r),\ \dfrac{\dfrac{\overset{1}{p}}{p \vee q}(A_i)\quad \dfrac{\overset{1}{p}}{p \vee r}(A_i)}{(p \vee q) \cdot (p \vee r)}\ (K_i)\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{q \cdot r}}{q}(K_e)}{p \vee q}(A_i)\quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{q \cdot r}}{r}(K_e)}{p \vee r}(A_i)}{(p \vee q) \cdot (p \vee r)}}{(p \vee q) \cdot (p \vee r)}}{p \vee (q \cdot r) \rightarrow ((p \vee q) \cdot (p \vee r))}\ (C_i)$$

(2)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\forall y F(a,\ y)}}{F(a,\ b)}\,(\forall_e)}{\exists x\ F(x,\ b)}\,(\exists_i)}{}\,(\forall_i)$$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{2}{\exists x\forall y F(x,\ y),\ \forall y\exists x F(x,\ y)}}{\forall y\ \exists x\ F(x,\ y)}}{\exists x\forall y\ F(x, y)\rightarrow\forall y\exists x F(x, y)}\,(C_i)$$

(3)

$$\cfrac{\cfrac{\overset{2}{Fa}}{\exists x Fx}\,(\exists_i)\qquad\qquad \overset{1}{\overline{\exists x\ Fx}}}{\cfrac{\cfrac{\overline{Fa}}{\forall y\overline{Fy}}\,(\forall_i)}{\overline{\exists x\ Fx}\rightarrow\forall y\ \overline{Fy}}\,(C_i)}\ \text{(din contradicție decurge orice)}$$

(Gentzen introduce inițial și o regulă care spune că din contradicție decurge orice $\dfrac{A,\ \bar{A}}{B}$. Notăm că simbolizarea regulilor este la Gentzen întrucîtva deosebită de cea dată aci. Noi am preluat simbolizarea care s-a răspîndit ulterior).

Vom demonstra în continuare teze din calculul propozițiilor și calculul predicatelor folosind metavariabilele A, B, C, ...). Uneori pentru a reformula rezultatul deducției în vederea aplicării unor reguli vom folosi semnul $\vdash$ *.

(4) $A \bullet B \rightarrow B \bullet A$

$$\cfrac{\cfrac{A \bullet B\ \text{(supoziția)}}{A,\ B}\,(K_e)}{B \bullet A}\,(K_i)$$

* Dacă vrem uneori să omitem parantezele vom adopta regula că V leagă mai tare decît   mai tare ca →, → mai tare ca =.

(5) $(A \vee B) \to (B \vee A)$

$$\cfrac{A \vee B \text{ (supoziția)}}{\cfrac{[A],\ [B]}{B \vee A, \quad B \vee A}\ (A_i)}$$

(Presupunem cazurile pe rînd, ceea ce notăm prin includerea în pranteze [ ]).

$$\cfrac{\cfrac{A \vee B,\ A \vdash B \vee A,\ B \vdash B \vee A}{B \vee A}\ (A_e)}{(A \vee B) \to (B \vee A)}\ (C_i)$$

(6) $(AB \vee AC) \to A(B \vee C)$

$$\cfrac{AB \vee AC \text{ (supoziția)}}{\cfrac{[AB],\ [AC]}{A,\ B \quad A,\ C}\ (K_e)}$$

$$\cfrac{\cfrac{A,\ B \vdash B \vee C, \quad C \vdash B \vee C}{A,\ B \vee C}\ (A_i)}{A \cdot (B \vee C)}\ (K_i)$$

(aci se reformulează rezultatul)

(7) $A(B \vee C) \to AB \vee AC$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A(B \vee C)}{A,\ B \vee C}\ (K_e)}{\cfrac{A,\ [B],\ [C]}{AB, \quad AC}\ (K_i)}}{\cfrac{A(B \vee C), \quad AB \vee AC}{A(B \vee C) \to AB \vee AC}\ (C_i)}\ (A_i)$$

Regula implicației a fost aplicată după ce s-a dedus $AB \vee AC$ din $A(B \vee C)$, adică avem $A(B \vee C) \vdash AB \vee AC$. Această reformulare a fost pur și simplu presupusă.

(8) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

Să urmărim în amănunt aplicarea regulilor la această demonstrație. Presupunem $A \to B$. De aci prin C_e obținem $(B \to C) \to (A \to C)$. Presupunem $B \to C$. De aci prin C_e:

$A \to C$

Presupunem A. De aci prin C_e:

C

Conform cu regula $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$ vom avea mulțimea (A → B; B → C; A) de presupuneri din care decurge C. Aceasta poate fi scris: A → B, B → C, A ⊢ C, unde A → B și B → C constituie premisele cuprinse în Γ (acesta ar putea să fie și vid). Deci $\underbrace{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C}_{\Gamma}$ și A ⊢ C

prin urmare A → B, B → C ⊢ A → C (conform cu regula de introducere a implicației). Mai departe avem $\underbrace{A \rightarrow B}_{\Gamma}$, B → C ⊢ A → C, prin urmare (aplicînd din nou C_i):

$$A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

De aci din nou prin C_i avem:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Pe baza demonstrațiilor efectuate putem introduce noi reguli. De exemplu, în conformitate cu (8) avem regula

$$\frac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

(9) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A.B) \rightarrow C)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \bullet B}{A,\ B}\,(K_e)}{B \rightarrow C,\quad C}\,(C_e)}{A \bullet B,\quad C}\,(K_i)$$

$$\cfrac{\cfrac{A \bullet B \vdash A,\ B;\ A,\ B \vdash C}{(A \bullet B) \rightarrow C}\,(8)}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \bullet B) \rightarrow C)}\,(C_i)$$

(10) $A \to A$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A}{\overline{\overline{A}}}\,(N_i)}{A}\,(N_e)}{\cfrac{A \vdash \overline{\overline{A}},\ \overline{\overline{A}} \vdash A}{A \to A}\,(8)}$$

Se poate considera şi regula derivată $A \vdash A$.

(11) $A \to (B \to A)$

$$\frac{A,\ B}{A}\,(10) \quad \text{(două supoziţii, unde B poate fi şi vid)}$$

$$\frac{A,\ B \vdash A}{A \to (B \to A)} \quad \text{(Dublă aplicare a lui } C_i\text{)}$$

(12) $\Gamma,\ A,\ \bar{A} \vdash B$ (Regula „din contradicţie decurge orice"). Este important de reţinut că Γ poate să fie şi vid.

Supoziţie. $A,\ \bar{A}$

Supoziţie. $[B]$ (conform cu condiţiile lui Γ, $[B]$ poate să nici nu existe).

$$\frac{A,\ [B]}{A} \quad \text{(conform cu regula } A \vdash A\text{).}$$

Tot de aci conform cu (C_i):

$$\frac{A \vdash B \to A}{A \to (B \to A)}\,(C_i)$$

$$\cfrac{A}{\cfrac{\cfrac{B \to A}{\bar{A} \to \bar{B}}\,(N_i) \qquad \bar{A}}{\cfrac{\cfrac{\bar{B}}{\overline{\overline{B}}}}{B}\,(N_e)}\,(C_e)}$$

(unde B este oarecare şi deci poate fi şi $\bar{B}$)

Deci $\Gamma,\ A,\ \bar{A} \vdash B$, deci $A \to (\bar{A} \to B)$

(13) $\overline{A \cdot \overline{A}}$

Conform cu Γ, $A, \overline{A} \vdash B$ avem $A, \overline{A} \vdash \overline{B}$ (unde B este o formulă oarecare), deci

$$A, \overline{A} \vdash \overline{A \to A}$$

Supoziție.

$$\begin{array}{ll}
A \cdot \overline{A} & \\
\hline
A, \ \overline{A} & (K_e) \\
\hline
\overline{A \to A} & (12) \\
\hline
A \cdot \overline{A} \vdash \overline{A \to A} & \\
\hline
A \cdot \overline{A} \to \overline{A \to A} & (C_i) \\
\hline
\overline{\overline{A \to A}} \to \overline{A \cdot \overline{A}} & (N_i)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
A \to A & \\
\hline
\overline{\overline{A \to A}}, \ \overline{\overline{A \to A}} \to \overline{A \cdot \overline{A}} & (N_i) \\
\hline
\overline{A \cdot \overline{A}} & (C_e)
\end{array}$$

(14) $A \vee \overline{A}$

$$\begin{array}{ll}
A, \ \overline{A} \to A, & A, \ \overline{A} \to \overline{A} \\
\hline
A & \overline{A} \\
\hline
A \vee \overline{A} & A \vee \overline{A} \\
\hline
A \vdash A \vee \overline{A}, & \overline{A} \vdash A \vee \overline{A} \\
\hline
A \to A \vee \overline{A}, & \overline{A} \to A \vee \overline{A} \\
\hline
\overline{A \vee \overline{A}} \to \overline{A} & \overline{A \vee \overline{A}} \to \overline{\overline{A}}
\end{array}$$

Supoziție. $\overline{A \vee \bar{A}}$ (presupunem că terțul exclus nu este adevărat)

$$\begin{array}{c} \overline{A \vee \bar{A}},\ \overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow \bar{A},\ \overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{A}} \\ \hline \bar{A} \qquad\qquad \bar{\bar{A}} \\ \hline \bar{A} \cdot \bar{\bar{A}} \end{array}$$

(Această contradicție rezultă din presupunerea $\overline{A \vee \bar{A}}$)

$$\begin{array}{c} \overline{A \vee \bar{A}} \rightarrow \bar{A} \cdot \bar{\bar{A}} \\ \hline \overline{\bar{A} \cdot \bar{\bar{A}}} \rightarrow \overline{\overline{A \vee \bar{A}}} \end{array}$$

Dar $\overline{\bar{A} \cdot \bar{\bar{A}}}$ este formulă demonstrabilă din (13)

Deci $$\begin{array}{c} \overline{\bar{A} \cdot \bar{\bar{A}}},\ \overline{\bar{A} \cdot \bar{\bar{A}}} \rightarrow \overline{\overline{A \vee \bar{A}}} \\ \hline \overline{\overline{A \vee \bar{A}}} \\ \hline A \vee \bar{A} \end{array}$$

În vederea deducerii unor formule predicative vom considera ca strictă ordinea variabilelor astfel: w, x, y, z, s

(15) $\forall x Fx \cdot \forall x Gx \equiv \forall x (Fx \cdot Gx)$

Demonstrăm pe rînd cele două implicații:

(a) $\forall x Fx \cdot \forall x Gx \rightarrow \forall x (Fx \cdot Gx)$

(b) $\forall x Fx \cdot \forall x Gx$ (supoziție)

(c) $\forall x Fx$, $\forall x Gx$ (K_e)

(d) Fx, Gx ($\forall_e$)

(e) $Fx \cdot Gx$ (K_i)

(f) $\forall x (Fx \cdot Gx)$ ($\forall_i$) x nu se utilizează mai departe în aplicarea lui $\forall_i$).

Considerăm cea de a doua implicație:

(a) $\forall x(Fx \bullet Gx) \rightarrow \forall xFx \bullet \forall xGx$

(b) $\forall x(Fx \bullet Gx)$ (supoziție)

(c) $Fx \bullet Gx$ ($\forall_e$)

(d) Fx, Gx (K_e)

(e) $\forall x\ Fx$, $\forall x\ Gx$ ($\forall_i$, x e limitat)

(f)* $\forall xFx \bullet \forall xGx$

Conform cu rezultatele (f) și (f)* putem introduce cele două implicații (prin C_i) și de aci echivalența (15).

(16) $\exists x\forall yF(x, y) \rightarrow \forall y\exists xF(x, y)$ (Ordinea variabilelor x, y este fixă).

(a) $\exists x\forall yF(x, y)$ (supoziție)

(b) $\forall yF(x, y)$($\exists_e$ x limitat)

(c) $F(x, y)$($\forall_e$)

(d) $\exists x\ F(x, y)$($\exists_i$)

(e) $\forall y\exists xF(x, y)$ ($\forall_i$)

(16) este exemplul dat de Gentzen dar demonstrat aci în simbolismul adoptat. Inversa lui (16) nu se demonstrează, adică nu este adevărată $\forall x\exists y\ F(x, y) \rightarrow \exists y\forall xF(x, y)$

(a) $\forall x\exists yF(x,y)$ (supoziție)

(b) $\exists yF(w, y)$ ($\forall_e$)

(c) $F(w, z)$ ($\exists_e$)(z este limitat)

Dacă am deduce mai departe:

(d) $\forall xF(x, z)$, z este variabilă liberă ce urmează după w și deci nu putem deduce (d) prin aplicare de $\forall_i$.

Dacă în $\exists y\ F(w, y)$ am lua în loc de w variabila mai îndepărtată z, $\exists yF(z, y)$, n-am putea deduce $F(z, w)$ deoarece w precede pe z. În locul acesteia ar trebui luat s și n-am putea deduce $\forall x\ F(x, s)$ deoarece z precede pe s. În cazurile (15) și (16), n-am folosit o altă variabilă pentru x, y în trecerea la

alte formule conform cu regulile de introducere deoarece ele nu au intervenit decît cîte o singură dată în aplicarea unei reguli.

(17) $\exists x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

(a) $\exists x \exists y\ F(x, y)$ (supoziție)

(b) $\exists y F(w_1, y)$ (x a fost limitat prin $\exists_e$)

(c) $F(w_1, w_2)$ (y — limitat, $\exists_e$)

(d) $\exists x F(x, w_2)$ ($\exists_i$)

(e) $\exists y \exists x F(x, y)$ ($\exists_i$)

(18) $(A(x) \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow B)$

(a) $A(x) \rightarrow B$ (supoziție)

(b) $A(x)$ (supoziție)

(c) B

(d) $\exists x A(x)$ (supoziție)

(e) $A(w)$ (x — limitat)

(f) B

(g) $A(x) \rightarrow B(C_i)$

(h) $\exists x A(x) \rightarrow B$ (prin tranzitivitate din (a), (e), (f))

(i) $(A(x) \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow B)$

Formulei (18) îi corespunde regula derivată

$$\frac{A(x) \vdash B}{\exists x A(x) \vdash B}$$

(19) Demonstrăm modul *Darii*:

$$\forall x(Mx \rightarrow Px), \exists x(Mx \cdot Sx) \vdash \exists x(Sx \cdot Px)$$

(a) $\forall x\ (Mx \rightarrow Px)$ (supoziție)

(b) $\exists x(Mx \cdot Sx)$ (supoziție)

(c) $Mx \rightarrow Px$ ($\forall_e$)

(d) $Mx \cdot Sx$ (x — limitat)

(e) Mx, Sx (K_e)

(f) Px (din (c) și (e) prin C_e)

(g) $Sx \cdot Px$ (K_i)

(h) $\exists x(Sx \cdot Px)$ ($\exists_i$) Q.E.D.

V

TEORIA MULȚIMILOR ȘI LOGICA CLASELOR

În acest capitol vom expune o serie de noțiuni de teoria mulțimilor și de logica claselor. Cele două teorii sînt în strînsă legătură și formează din punct de vedere formal o teorie unitară; cu toate acestea noi vom face o diferență clară între ele, spre deosebire de alți autori care le confundă. Concepția logicistă dezvoltată de Frege și Russell conform cu care matematica este o ramură a logicii rezidă în mare măsură în această confuzie. Fraenkel și Bar-Hillel pun problema unei asemenea distincții în „Bazele teoriei mulțimilor" dar nu se ocupă de soluționarea ei.

1. NOȚIUNEA DE MULȚIME ȘI NOȚIUNEA DE CLASĂ

Universul este format din obiecte și determinări ale acestora. Una și aceeași determinare F poate aparține unui obiect sau mai multor obiecte. A spune că determinarea F aparține unui obiect sau mai multor obiecte este identic cu a spune că „F delimitează o mulțime de obiecte". În logică pentru a vorbi de mulțimi ne exprimăm, de exemplu, astfel „mulțimea F" și înțelegem prin aceasta mulțimea determinată de F. Astfel avem: mulțimea *Om*, mulțimea *Animal* ș.a. Mulțimile sînt desemnate în mod obișnuit cu ajutorul proprietății care le determină (ex. *Om*) Alteori se folosește pentru mulțimi forma plurală, ex. *Oameni*. Termenii pentru desemnarea mulțimilor în limbajul obișnuit sînt foarte variați, ceea ce se poate vedea din exemplele următoare: o *turmă* de oi, un *roi* de al-

bine, o *cireadă* de vaci, un *cîrd* de păsări, o *clasă* de elevi, un *grup* de băieți, un *buchet* de flori, o *escadrilă* de avioane, o *pereche* de ghete, o *legătură* de morcovi, un *ansamblu* de mere, o *grămadă* de lemne, o *trupă* de soldați, o *grupă* de studenți, o *colecție* de cărți. Mulțimile se simbolizează fie cu simbolurile determinărilor F, G, H, . . . , fie cu simboluri distincte X, Y, Z, , sau M_1, M_2, . . . Obiectele conținute într-o mulțime se vor numi elementele mulțimii. Dacă o mulțime este formată din alte mulțimi atunci acestea din urmă vor fi tratate ca elemente. De exemplu, mulțimea claselor de elevi este o mulțime de mulțimi (fiecare clasă de elevi fiind în acest caz un element al mulțimii considerate).

Vom nota mulțimile cu X, Y, Z, M, N, ... , iar elementele mulțimii cu *a*, *b*, *c*, ~~. . . , sau a_1, a_2,~~ . . . ., b_1, b_2, . Vom spune că „un element aparține mulțimii și vom nota această relație prin $\in$, deci

$$a \in X \text{ („}a\text{ aparține lui } X\text{")}$$

Pentru a arăta că o mulțime se conține în altă mulțime (de exemplu, că din mulțimea claselor de elevi face parte și mulțimea claselor de elevi din București), vom folosi semnul $\subset$ (este inclus în, este cuprins în) și vom scrie:

$$X \subset Y \text{ („X este inclus în Y")}$$

Semnul $\in$ se va numi semnul apartenenței, iar semnul $\subset$, semnul incluziunii. Noțiunea de mulțime este o noțiune primă (luată ca nedefinită explicit). Pe baza ei putem introduce noțiunea de „clasă"*. Se numește *clasă* o mulțime de elemente care realizează (satisface) o funcție propozițională. De exemplu, funcția „OM (*x*)" este satisfăcută de clasa indivizilor oameni. Clasa care satisface funcția propozițională este numai o parte din mulțimea indivizilor care pot corespunde variabilei *x*. Clasa este deci mulțimea elementelor pentru care funcția propozițională este adevărată. Prin urmare, clasa este corelată de la început cu funcția propozițională, în timp ce mulțimea nu. Ca și funcțiile propoziționale, cu care sînt corelate, clasele sînt ierarhizate (ex. clase de indivizi, clase de clase

* Unii autori consideră termenul „clasă" drept primitiv și definesc prin el „mulțimea" (în sensul în care noi am definit clasa).

de indivizi etc.). Pentru a desemna elementele clasei vom folosi variabile specializate x, y, z, ... sau x_1, x_2, , y_1, y_2, ... , (variabile individuale, care deci țin seama de principii de ierarhizare). Deosebirea dintre a, b, c, ... și x, y, z, ... , constă în aceea că primele pot fi și o mulțime de indivizi în timp ce celelalte desemnează doar indivizi. Pentru a desemna clasele vom prefera simbolurile F, G, H, (care fac ca și x, y, z, legătura cu funcțiile propoziționale). Vom scrie corespunzător

$x \in F$ („x aparține lui F") și

$F \subset G$ („F este inclus (cuprins) în G")

Din cele de mai sus decurge că $x \in F$ nu este identic cu $a \in X$, iar $F \subset G$ nu este identic cu $X \subset Y$, deși se înțelege că primele sînt cazuri particulare pentru relațiile corespunzătoare din teoria mulțimilor.

Dacă $x \equiv a$ și $F \equiv X$ se înțelege că $x \in F \equiv a \in X$.

Dacă $F \equiv X$ și $G \equiv Y$ atunci $F \subset G \equiv X \subset Y$.

În consecință, vom spune că o mulțime este clasă dacă și numai dacă există o funcție propozițională pe care mulțimea respectivă o realizează (satisface). De exemplu, mulțimea (+2, —2) realizează funcția propozițională „$x^2 = 4$", ea este deci clasa corespunzătoare acestei funcții propoziționale. Notînd mulțimile concrete cu M_1, M_2, le putem reprezenta dacă sînt finite prin $\{a_1, a_2, ... a_n\}$. Expresia „(M_1) $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$" va însemna „mulțimea M_1 formată din elementele a_1, a_2 .... a_n.
Cînd mulțimile sînt infinite nu putem folosi reprezentarea de mai sus ci ne vom folosi de următoarea expresie.

$\{a \mid a$ are proprietatea P$\}$

(adică „acele elemente a care au proprietatea P"). Scrierea (M_1) $\{a_1, a_2, , a_n\}$ este *extensională* (mulțimea este redată prin indicarea elementelor ei), iar scrierea $\{a \mid a$ are proprietatea P$\}$ este *intensională* (mulțimea este dată prin proprietatea elementelor ei). Este indicat ca prin a, b, c, ... să notăm elemente *oarecare* ale mulțimii, iar prin litere cu indici elemente (presupus) *date.*

Pentru semnele $\in$ și $\subset$ este adevărată propoziția: dacă a $\in$ X atunci $\{a\} \subset X$. Reținem apoi două principii: 1) *principiul extensionalității* (o mulțime este complet determinată prin elementele sale) și 2) *principiul abstracției* (o formă propozițională P(v) determină univoc o mulțime **X** dacă pentru orice $a \in X$ are loc P(v)).

2. FELURI DE MULȚIMI

Putem clasifica mulțimile după numărul de elemente conținute în a) mulțimi vide, b) mulțimi singulare, c) mulțimi finite, d) mulțimi infinite, e) Universul.

a. **Mulțimea vidă.** Cea mai simplă mulțime este mulțimea vidă, adică mulțimea fără elemente. După sensul popular acordat „mulțimii" trebuie să avem de a face cu cel puțin două obiecte pentru a avea o mulțime, iar uneori chiar cu mai multe (fără a preciza numărul). Datorită sensului popular acordat termenului de mulțime (cu diferitele sale denumiri), uneori este foarte greu să spunem dacă avem de a face cu o mulțime sau nu. Este cunoscut în acest sens „sofismul grămezii" care arată că noțiunea populară de mulțime ne pune în imposibilitatea de a spune dacă 2 sau 3 boabe (de exemplu) formează sau nu o „grămadă" (mulțime). În teoria mulțimilor termenul de „mulțime" este folosit într-un sens general care cuprinde și cazul cînd nu avem nici un element. Surprinzător este faptul că deși atunci cînd e vorba să expliciteze mulțimea gîndirea populară exclude mulțimile vide, există contextele clare în care ea utilizează astfel de mulțimi. Dacă, de exemplu, ni se dă să întocmim un tabel cu clasificarea pe profesii la o întreprindere, noi putem ajunge la cazul unei mulțimi vide. Fie următorul tabel:

1.	Muncitori strungari	5
2.	Muncitori lăcătuși	3
3.	Muncitori tîmplari	0

Ultima expresie are intenția de a desemna o mulțime de muncitori (tîmplari) și noi nu răspundem „nu există o astfel de mulțime" ci că „ea are 0 elemente". Dacă punem întrebarea „cîți muncitori sînt tîmplari?" aceasta echivalează cu „cîți muncitori (din întreprinderea Z) aparțin mulțimii tîmplarilor" sau „cîte elemente are mulțimea tîmplarilor din între-

prinderea Z". Noi răspundem: „niciunul". Prin urmare, putem spune „mulțimea tîmplarilor de la întreprinderea Z nu are nici un muncitor", adică ea este o mulțime vidă. Alte exemple de mulțimi vide sînt: „mulțimea plantelor raționale", „mulțimea găinilor patrupede".

La prima vedere, avem o infinitate de mulțimi vide, în realitate, dacă ne gîndim că aceste mulțimi nu diferă prin nimic afară de denumire sîntem îndreptățiți să spunem că *există o singură mulțime vidă care însă poate fi denumită într-o infinitate de moduri.* În acest fel, „mulțimea plantelor raționale" și „mulțimea găinilor patrupede" sînt două expresii pentru o singură mulțime. Uneori mulțimea vidă poate fi un mijloc important de caracterizare a realității. Astfel dacă spunem că „mulțimea de studenți repetenți din anul întîi este vidă" este evident că aceasta este o caracterizare importantă (social) pentru anul I.

O mulțime vidă se notează de obicei cu $\emptyset$. Deoarece în legătură cu orice mulțime putem imagina o parte vidă vom spune că *mulțimea vidă se conține în orice altă mulțime* simbolic



$$\emptyset \subset X$$

b. **Mulțimea singulară (individuală).** După considerente analoge cu cele privitoare la mulțimea vidă se introduce ca mulțime și mulțimea cu un singur element $\{a\}$. Astfel „mulțimea sateliților naturali ai pămîntului" desemnează o mulțime cu un singur element (anume *Luna*).

c. **Mulțimi finite.** Mulțimile cu un număr *n* de elemente (număr finit) sînt mulțimi finite. Astfel, mulțimea locuitorilor României, mulțimea muncitorilor de la „23 August", mulțimea navetiștilor de la Uzinele „Grivița Roșie", $\{2, 3, 5\}$, $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$ sînt mulțimi finite. După cum am mai spus o mulțime finită cu *n* elemente poate fi reprezentată prin $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ (unde ordinea elementelor nu contează). Mulțimile finite sînt mulțimile experienței noastre nemijlocite.

d. **Mulțimi infinite.** În opoziție cu mulțimile finite avem mulțimile cu o infinitate de elemente. Aceste mulțimi nu sînt accesibile imediat experienței noastre. Astfel sînt: mulțimea

atomilor, mulțimea numerelor naturale ș.a. Incomplet ele pot fi reprezentate astfel:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

S-a arătat deja (în capitolul despre logica predicatelor) că există propoziții care sînt valabile pentru mulțimile infinite, dar nu pentru cele finite. Deși nu sînt „mulțimi experimentale" (și nu pot fi redate extensional) aceste mulțimi joacă un mare rol în teoria generală a mulțimilor.

e. **Universul.** Se poate concepe o mulțime care conține toate elementele imaginabile, aceasta este mulțimea universală (Universul). Această mulțime poate fi notată cu U. Prin definiție este adevărat că orice mulțime este conținută în U, deci

$$X \subset U$$

Ca și în cazul mulțimii vide există o singură astfel de mulțime. Putem lua în considerație și alte criterii de clasificare — de exemplu modul în care o mulțime se raportează la alta. Astfel, unele mulțimi sînt „simple" în raport cu altele „compuse" din acestea. Mulțimea oamenilor cu studii sau fără studii este compusă din mulțimea oamenilor cu studii și mulțimea oamenilor fără studii. (Despre modul de „compunere" a mulțimilor vom discuta pe larg în paragraful următor).

Mulțimile pot forma apoi o ierarhie (adică sînt de diferite ordine): mulțimi de indivizi, mulțimi de mulțimi de indivizi etc. Mulțimile de indivizi formează primul ordin, mulțimile de mulțimi de indivizi formează ordinul doi (sau „sisteme de mulțimi"), mulțimile de sisteme de mulțimi formează ordinul trei sau „familii de mulțimi" și așa mai departe de la ordinul n la $n + 1$. Mulțimile cuprinse într-o altă mulțime se numesc și „submulțimi". De exemplu, avînd mulțimea $\{a, b\}$ submulțimile ei vor fi $\varnothing$ (mulțimea vidă), $\{a\}$, $\{b\}$ (mulțimi singulare) și $\{a, b\}$ (însăși mulțimea). În general o mulțime X este submulțime a unei mulțimi Y dacă a) ea este mulțime vidă sau b) dacă elementele ei sînt conținute în mulțimea Y.

Mulțimea potențială. Un caz important de mulțime este așa numita mulțime potențială. Dacă M este o mulțime atunci P(M) este o astfel de mulțime ale cărei elemente sînt submulțimile lui M. P(M) se numește mulțimea potențială a lui M.

Dacă $M = \{a_1, a_2, a_3\}$ submulțimile ei vor fi $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \{a_1\}$, $M_3 = \{a_2\}$, $M_4 = \{a_3\}$, $M_5 = \{a_1, a_2\}$, $M_6 = \{a_1, a_3\}$, $M_7 = \{a_2, a_3\}$, $M_8 = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Dacă $M = \emptyset$, atunci $P(M) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Mulțimea potențială a mulțimii vide are un singur element (însăși $\emptyset$).

Dacă $M = \{a\}$ atunci $P(M) = \{a, \emptyset\}$, adică mulțimea potențială a mulțimii singulare are două elemente.

Teoremă. Dacă M are *n* elemente atunci P(M) are 2^n elemente. O mulțime importantă este *mulțimea perechilor*, adică mulțimea formată din cupluri (de cîte două elemente). Elementele perechii pot fi ordonate sau nu. Se pot concepe, desigur, *triplete*, *cvadruple*, . . . , *n*-tuple.

Graf. Mulțimea perechilor (X, Y) unde Y și Y sînt mulțimi se numește *graf* dacă și numai dacă pentru orice $X \in M$ există un și numai un $Y \in N$.

Produs cartezian. $M \times N$ se numește produs cartezian dacă reprezintă o mulțime de perechi (cupluri) (X, Y) astfel că $X \in M$ și $Y \in N$. (Aceste ultime două noțiuni pot fi generalizate).

3. OPERAȚII ȘI RELAȚII REFERITOARE LA MULȚIMI

Avînd o serie de mulțimi X, Y, Z, noi putem forma cu ajutorul anumitor operații noi mulțimi. Operațiile și mulțimile rezultate vor purta același nume.

a. **Considerarea mulțimii.** Cea dintîi operație raportată la o mulțime este considerarea ei. Spunem „să considerăm mulțimea. . .” și indicăm un procedeu prin care ea este distinsă de alte mulțimi.

b. **Complementarea unei mulțimi.** Dacă M este o mulțime oarecare atunci $\overline{M}$ va fi complementara sa și va fi formată din toate elementele care nu aparțin lui M, cu alte cuvinte M și $\overline{M}$ (citește „non-M”) împart universul U în două. Astfel complementara mulțimii *Om* va fi mulțimea *Non-Om*. Universul și mulțimea vidă sînt complementare:

$$(1) \qquad \overline{U} \equiv \emptyset$$

$$(2) \qquad \overline{\emptyset} \equiv U$$

Chiar din aceste identități se poate observa că există anumite dificultăți, legate de noțiunea de „univers". Nu toți matematicienii și logicienii sînt de acord cu definiția atît de largă dată mai sus. Gr. C. Moisil concepe noțiunea de univers ca mai sus și o denumește „mulțimea totală" (o notează cu I).

„Vom considera mulțimea *I* a tuturor elementelor. Oricare ar fi *x* el este element al lui I, deci oricare ar fi mulțimea α, avem $\alpha \subset I$ ..."[1]. Semnalăm deja concluzia „paradoxală" că întrucît orice mulțime este cuprinsă în U, va fi cuprinsă și complementara lui U (adică $\emptyset$):

$$\bar{U} \subset U$$

Se poate introduce desigur o procedură sau alta pentru evitarea acestei situații, de exemplu, U este universul mulțimilor nevide, sau U este universul mulțimilor *de un anumit ordin* (ex. universul indivizilor). În acest ultim caz prin „universul unei mulțimi M" se va înțelege *universul în sens restrîns*. Afirmațiile referitoare la mulțimi vor fi ca urmare restrînse în conformitate cu restricțiile impuse. În anumite limite însă se poate opera fără teamă cu conceptul de mai sus. Putem de exemplu, să ne abținem de la a face afirmații despre U, dacă ele nu sînt strict necesare pentru studiul celorlalte mulțimi.*

Vom reprezenta o mulțime X în universul U astfel

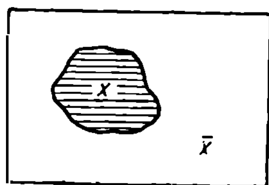


Fig. 3

Partea albă va fi complementara lui X.

c. **Intersecția mulțimilor.** Dacă X este o mulțime formată din elemente care aparțin atît mulțimii Y cît și mulțimii Z vom spune că X este intersecția mulțimilor Y și Z.

Simbolic : $X \equiv Y \cap Z$ (citește „Y și Z")

[1] Gr. C. Moisil, *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*, București, 1968.

* În exemplele pe care le vom da universul va însemna pur și simplu „genul" (vezi a. —m.)

Astfel, mulţimea studenţilor-sportivi este formată din acei studenţi care sînt sportivi şi invers, din acei sportivi care sînt studenţi.

Intersecţia mulţimilor poate fi reprezentată (partea haşurată) astfel:

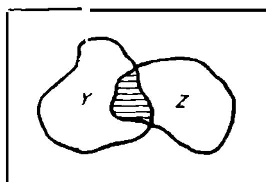


Fig. 4

$Y \cap Z$

Sociologul foloseşte adesea intersecţia mulţimilor, de exemplu cînd aplică simultan mai multe criterii („indicatori"), de clasificare. Rezultatul aplicării simultane a unor criterii (diferite) este o mulţime de intersecţie. De exemplu, indicatorii „muncitor", „calificat", „căsătorit" dau prin aplicare simultană mulţimea „muncitor calificat şi căsătorit".

Muncitor $\cap$ Calificat $\cap$ Căsătorit.

d. **Reuniunea mulţimilor.** Reuniunea a două mulţimi Y şi Z formează o mulţime reunită X dacă şi numai dacă elementele lui X aparţin *cel puţin* uneia din mulţimile Y, Z.

Simbolic : $X \equiv Y \cup Z$ („Y sau Z").

Putem forma mulţimi reunite ori de cîte ori criteriile utilizate nu se exclud. De exemplu, mulţimea fruntaşilor din întreprinderea A poate fi o reuniune: fruntaşi în munca profesională sau fruntaşi în activitatea obştească (nu este exclus să fie şi în ambele).

Alte exemple:

Calculatorii din fabrica A $\equiv$ Absolvenţi ai facultăţii de matematică $\cup$ Absolvenţi ai Politehnicii.

Ciberneticienii din fabrica A $\equiv$ Matematicieni $\cup$ Ingineri $\cup$ $\cup$ Lingvişti $\cup$ Logicieni $\cup$ Fiziologi.

Comisia de doctorat $\equiv$ Doctori $\cup$ Conferenţiari

Pacienți la ORL $\equiv$ Bolnavi de urechi $\cup$ Bolnavi de nas $\cup$ $\cup$ Bolnavi de gît.

Mulțimile reunite joacă un rol deosebit de important în matematică și logică.

Mulțimile reunite se reprezintă astfel:

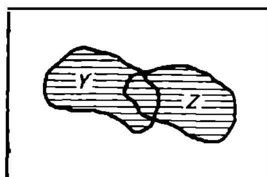


Fig. 5

$Y \cup Z$

e. **Mulțimi disjuncte** (exclusive) Spunem că X reprezintă o mulțime disjunctă de Y și Z dacă și numai dacă nici un element al lui X nu aparține atît lui Y cît și lui Z.

Simbolic: $X \equiv Y + Z$ („Y exclude Z")

Mulțimea propozițiilor clasice = Propoziții adevărate + Propoziții false.



Fig. 6

$Y + Z$

f. **Mulțimi reziduate** O mulțime X se numește reziduată dacă ea este o reuniune de Y și $\bar{Z}$ sau de $\bar{Y}$ și Z.

Simbolic:

$$X_1 \equiv Y \cup \bar{Z}$$

$$X_2 \equiv \bar{Y} \cup Z$$

Comisia C $\equiv$ Profesori emeriți $\cup$ Neparticipanți la Adunarea A. Candidați la admitere $\equiv$ Absolvenți de liceu $\cup$ Cei ce nu au mai mult de o facultate.

Participanți la spectacolul pentru studenți $\equiv$ Nebursieri $\cup$ $\cup$ Cei ce au fost evidențiați.

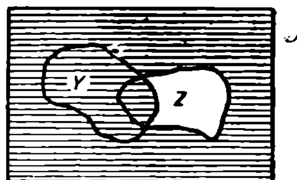


Fig. 7

$Y \cup \overline{Z}$

g. **Mulțimi diferență.** O mulțime X este diferență de Y și Z dacă și numai dacă X este o intersecție de Y și $\overline{Z}$ sau o intersecție de $\overline{Y}$ și Z.

Simbolic :

$$X_1 \equiv Y \cap \overline{Z}$$

$$X_2 \equiv \overline{Y} \cap Z$$

Pentru notarea diferenței se mai poate utiliza semnul „—" și scrie: Y — Z (Y cu excepția lui Z sau Y în afară de Z sau Y fără Z). Deci: $Y - Z \equiv Y \cap \overline{Z}$.
Aceste mulțimi sînt des folosite. Exemplu: studenți necăsătoriți, muncitori necalificați, nebursieri fruntași.

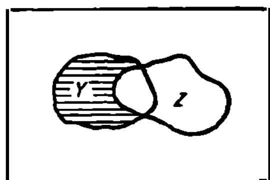


Fig. 8

$Y \cap \overline{Z}$

h. **Mulțimi anti-intersecție.** O mulțime X este anti-intersecție de Y și Z dacă și numai dacă ea este o reuniune a mulțimilor complementare lui Y și respectiv Z, adică o reuniune de $\overline{Y}$ și $\overline{Z}$.

Simbolic: $X \equiv \bar{Y} \cup \bar{Z}$ („fie $\bar{Y}$ fie $\bar{Z}$")

Exemplu : Bursieri $\equiv$ Nu au note sub 7 $\cup$ Nu au întreținere privată.

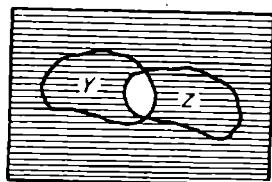


Fig. 9

$\bar{Y} \cup \bar{Z}$

i. **Mulțimea anti-reuniune.** Spunem că X este o mulțime anti-reunită de Y și Z dacă și numai dacă ea este o intersecție a complementarelor lui Y și respectiv Z, adică o intersecție de $\bar{Y}$ și $\bar{Z}$.

Simbolic : $X \equiv \bar{Y} \cap \bar{Z}$ („nici Y și nici Z").
Studenții care sînt admiși la spectacolul S $\equiv$ Nu au abateri de la disciplină $\cap$ Nu sînt repetenți, Căminiști $\equiv$ Nu au întreținere privată $\cap$ Nu au locuință personală în localitate. (Notăm că exemplele ne interesează sub aspectul lor logic și nu dacă sînt adevărate sau nu).

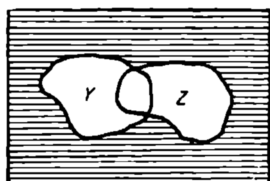


Fig. 10

$\bar{Y} \cap \bar{Z}$

j. **Mulțimea echivalență** („suma duală"). O mulțime X este echivalentă de Y și Z dacă și numai dacă ea este o intersecție definită astfel:

$$X \equiv (Y \cup \bar{Z}) \cap (\bar{Y} \cup Z).$$

Exemplu : Tinerii din fabrica A ≡ Fie că au absolvit şcoala medie, fie că nu au făcut serviciul militar, şi fie că nu au absolvit școala medie, fie că au făcut serviciul militar.

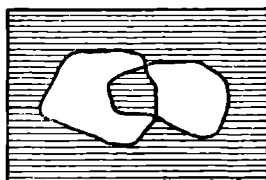


Fig. 11

$(Y \cup \bar{Z}) \cap (\bar{Y} \cup Z)$

k. **Mulţimea anti-echivalentă** („diferența simetrică"). Spunem că o mulțime X este o anti-echivalență de Y şi Z dacă și numai dacă ea este o reuniune definită astfel:

$$X \equiv (Y - Z) \cup (Z - Y)$$

Altfel scris: $(Y \cap \bar{Z}) \cup (Z \cap \bar{Y})$.

Exemplu: Muncitorii din fabrica A ≡ Oameni cu şcoala medie dar fără calificare în meserie sau oameni cu calificare în meserie dar fără şcoala medie.

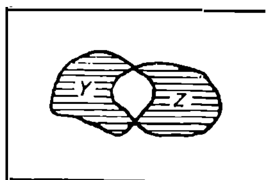


Fig. 12

$(Y \cap \bar{Z}) \cup (\bar{Y} \cap Z)$

l. **Mulţimea majoritară** este o mulțime X formată din mulțimile Y, Z, W şi definită astfel: $X \equiv (Y \cap Z) \cup (Z \cap W) \cup \cup (Y \cap W)$. Cu alte cuvinte ea este reuniunea tuturor intersecțiilor care pot fi formate între *n* mulțimi date. Ea se notează

prescurtat $Y \# Z \# W$. Exemplu. Participanți la spectacol $\equiv$ Studenți sportivi sau sportivi fruntași sau studenți fruntași

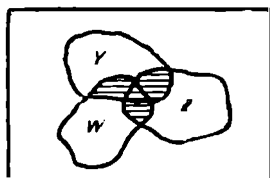


Fig. 13

$(Y \cap Z) \cup (Z \cap W) \cup (Y \cap W)$

m. **Mulțimea disjunctiv-condiționată** este o mulțime X formată din mulțimile Y, Z, W și definită astfel:

$$X \equiv (Y \cap Z) \cup (\bar{Z} \cap W)$$

Exemple :

Studenții de pe stadion $\equiv$ Studenți sportivi sau cei ce nu au făcut sport dar doresc să se antreneze.

Seraliști $\equiv$ Muncitori calificați sau cei ce nu sînt muncitori dar doresc să urmeze școala medie.

Participanți la adunare $\equiv$ Muncitori calificați sau fără a fi calificați dar cu funcții de răspundere.

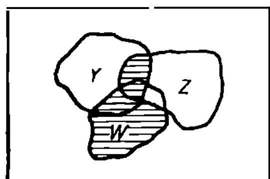
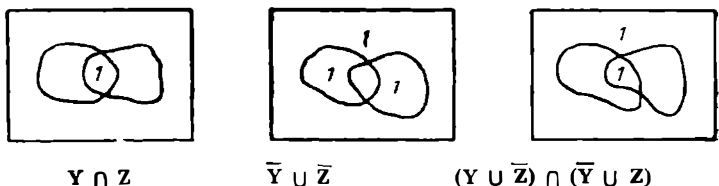


Fig. 14

$(Y \cap Z) \cup (\bar{Z} \cap W)$

Am văzut că în cele de mai sus mulțimile au fost reprezentate prin partea hașurată. Dacă în loc de a hașura vom pune în părțile pe care le considerăm a intra în mulțime cifra 1, iar

în rest cifra 0, vom avea posibilitatea unei reprezentări binare a mulțimilor. (Cifra 0 poate fi subînțeleasă).



$Y \cap Z$ $\quad$ $\bar{Y} \cup \bar{Z}$ $\quad$ $(Y \cup \bar{Z}) \cap (\bar{Y} \cup Z)$

Fig. 15

În raport cu universul putem da astfel reprezentările binare:

$$Y \cap Z \equiv 1000$$

$$\bar{Y} \cup \bar{Z} \equiv 0111$$

$$(Y \cup \bar{Z}) \cap (\bar{Y} \cup Z) \equiv 1001$$

(A se observa ordinea în care se iau părțile)

Conform cu definițiile date mai sus diferitelor mulțimi noi putem utiliza pentru denumirea unei mulțimi fie o singură expresie (exemplu: „propoziții clasice") fie expresia care constă din denumirile mulțimilor componente și a operatorilor (expresiile pentru operații) (exemplu: „propoziții adevărate sau propoziții false"). Denumirea compusă va fi utilizată sau cînd nu am introdus o denumire prescurtată sau cînd vrem să *definim mulțimea* prin raportarea la alte mulțimi.

În ce privește relațiile referitoare la mulțimi am făcut deja cunoștință cu relațiile de apartenență ($a \in X$) și de incluziune ($X \subset Y$). În general, o mulțime se raportează la alta fie ca element ($a \in X$) fie ca parte ($X \subset Y$), fie ca identică ($X \equiv Y$), caz în care deosebirea este doar de expresie.

Exemple: $2 \in$ Par, Par $\subset$ Numere naturale, Par $\equiv$ Numere care se divid fără rest la 2. Operatorii teoriei mulțimilor ($-$, $\cap$, $\cup$, ... $\in$, $\subset$, $\equiv$) se aplică nu numai la variabilele X, Y, Z, ..., M, N, ..., M_1, M_2, ci și la expresii care exprimă mulțimi compuse. Astfel:

$$\overline{X \cap Y}, \ (X \cap Y) \cup \bar{X}, \ (X \cap Y) \subset Z \text{ etc.}$$

(ceea ce în parte s-a și făcut cu ocazia definirii diferitelor mulțimi).

O relație specială de care se interesează teoria mulțimilor este *corespondența* (univocă și biunivocă).

Se spune că o mulțime X se află în corespondență univocă cu o mulțime Y dacă și numai dacă oricărui element din X i se asociază un și numai un element din Y.

Două mulțimi X și Y sînt egale (echivalente, echipolente, echipotente) dacă și numai dacă fiecărui element din X îi corespunde un singur element din Y și fiecărui element din Y îi corespunde un singur element din X (adică ele sînt biunivoc corespondente). De exemplu, mulțimile {2, 4, 6} și {1, 2, 3} pot fi puse în corespondență biunivocă astfel 2 — 1, 4 — 2, 6 — 3. Două mulțimi egale sînt de aceeași putere adică au același număr cardinal, altfel spus același număr de elemente.

Ca urmare numărul cardinal poate fi definit astfel: *Numărul cardinal al unei mulțimi oarecare M este mulțimea tuturor mulțimilor echipolente cu M.*

Zero se numește numărul cardinal al mulțimii vide (∅).

Unu se numește numărul cardinal al mulțimii P(∅) etc. Aplicarea teoriei mulțimilor la mulțimile de numere a adus cu sine metode speciale de reprezentare, cum ar fi metoda diagonalelor a lui G. Cantor.

$$\begin{array}{lllll} 0, & x_0 & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ & \searrow & & & \\ 0, & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ & & \searrow & & \\ 0, & x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ & & & \searrow & \\ 0, & x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}$$

Acest tabel reprezintă numerele reale din intervalul 0 — 1. Fracțiile infinite sînt scrise una sub alta. Un număr real x este dat de seria cifrelor puse în diagonală (indicată prin →), exemplu: 0, $x'_{00}x'_{11}x'_{22}x'_{33}$ (unde x' înseamnă că dacă $x = n$ atunci $x' = n + 1$). Fracția 0, $x'_{00}x'_{11}x'_{22}x'_{33}$ ... deși intră în interval nu este totuși conținută în tabel deoarece se deosebește cu + 1 de orice termen corespunzător al fracțiilor din tabel. Acest fapt arată că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă. Prin metoda diagonalelor putem sugera existența

numerelor transfinite, dar nu le putem da în mod complet. Această metodă poate fi utilizată și într-o serie de probleme de logică, cum ar fi studiul paradoxelor.

Date fiind relațiile strînse dintre teoria mulțimilor, și teoriile logice (algebra Boole, logica predicatelor, logica relațiilor) logica matematică este aproape întotdeauna expusă cu elemente de teoria mulțimilor, iar teoria mulțimilor profită în permanență de teoriile logicii matematice.

O aplicare interesantă pentru științele sociale este la procesul de clasificare (metodă des utilizată în tabelele sociologice). Fiind date un șir de criterii $K_1, K_2, \ldots K_n$ astfel că ele sînt diferite între ele (nu generează aceleași clase prin aplicare dar echivalente în sensul că se aplică la aceeași mulțime de obiecte) vom obține următorul sistem de clasificare dihotomică:

$$K_1, K_2, \ldots, K_n$$
$$\overline{K}_1, \overline{K}_2, \quad \overline{K}_n$$
$$K_1 \cap K_2, K_1 \cap K_3,$$
$$K_1 \cap K_2 \cap K_3,$$
$$K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap \quad \cap K_n$$
$$K_1 \cap \overline{K}_2, K_1 \cap \overline{K}_3,$$
$$\overline{K}_1 \cap K_2, \overline{K}_1 \cap K_2,$$
$$\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 \cap \quad \cap \overline{K}_2$$

Cu alte cuvinte vom forma toate intersecțiile posibile de n criterii ($n = 1, 2, \ldots, m$) luate cîte unu, cîte două etc., cîte n, atît negativ cît și pozitiv.

4. PROPOZIȚII ALE TEORIEI MULȚIMILOR

Pentru comparații ulterioare este util să reținem o serie de propoziții referitoare la proprietățile operațiilor și relațiilor.

(1) $\varnothing \subset M$

(2) $U \equiv \overline{\varnothing}$

(3) $U \equiv M + \overline{M}$

(4) $U \equiv M \cup \overline{M}$

(5) $\varnothing \equiv M \cap \overline{M}$

(6) $M \equiv M$

(7) $\overline{\overline{M}} \equiv M$

(8) $M \cap N \equiv N \cap M$

(9) $M \cup N \equiv N \cup M$

(10) $M \cap (N \cap R) \equiv$
$\equiv (M \cap N) \cap R$

(11) $M \cup (N \cup R) \equiv$
$\equiv (M \cup N) \cup R$

(12) $M \cup (N \cap R) \equiv$
$\equiv (M \cup N) \cap (M \cup R)$

(13) $M \cap (N \cup R) \equiv$
$\equiv (M \cap N) \cup (M \cap R)$

(14) $M \cap (M \cup N) \equiv M$

(15) $M \cup (M \cap N) = M$

(16) $\overline{M \cap N} \equiv \overline{M} \cup \overline{N}$

(17) $\overline{M \cup N} \equiv \overline{M} \cap \overline{N}$

(18) $M \cap M \equiv M$

(19) $M \cup M \equiv M$

(20) $M \subset M$*)

Cititorul poate observa uşor analogiile dintre aceste legi şi anumite legi din logica propoziţiilor. De exemplu, (8) şi (9) sînt legile comutativităţii, (10) şi (11) legile asociativităţii, (12) şi (13) legile distributivităţii, (14) şi (15) legile absorbţiei, (16) şi (17) legile lui de Morgan etc.

Toate formulele de mai sus (1)—(20) se referă la mulţimi.

(I) Fie un sistem de formule care sînt fie de forma $M \equiv N$, fie de forma $M \subset N$ şi în care M, N sînt termeni formaţi cel mult cu ajutorul operatorilor —, $\cap$, $\cup$ şi a variabilelor pentru mulţimi.

(II) Fie apoi sistemul de formule de forma $A = B$ şi $A \rightarrow B$, unde A şi B sînt expresii formate din aplicarea cel mult a operatorilor, —, •, V asupra variabilelor *p*, *q*, *r*, ... Primul sistem este un sistem de teoria mulţimilor, al doilea sistem este sistemul „algebrei Boole".

(III) Se poate arăta că algebra Boole (care operează cu două clase „totul" şi „nimicul") este izomorfă cu sistemul mulţimilor definit mai sus.

(IV) Dar algebra Boole este izomorfă şi cu logica adevăr-falsului definită formal prin (II) iar semantic prin două semni-

*) Semnele M, N, ... desemnează mulţimi X, Y, Z, sau mulţimi compuse de la acestea $X \cap Y$, $X \cup Y$ etc.

ficații (adevăr, fals), prin urmare logica astfel definită este *izomorfă* și cu teoria mulțimilor definită în (I)*).

Prin aceasta am stabilit deja relații foarte intime între cele trei teorii. Se înțelege că întrucît algebra propozițiilor (cu totalitatea operatorilor) admite și interpretări diferite de algebra Boole (de exemplu, pentru implicație se poate lua ca interpretare cu restricțiile necesare relația de deducție), logica propozițiilor luată în totalitatea ei nu este identică nici cu modelul algebrei Boole, nici cu teoria mulțimilor.

De exemplu, expresia:

$$((p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

nu-i putem pune în corespondență

$$((M_1 \subset M_2) \cap (M_2 \subset M_3)) \subset (M_1 \subset M_3)$$

căci n-are sens să spunem că „intersecția a două incluziuni este cuprinsă într-o incluziune”, doar dacă nu cumva admitem și o altă interpretare pentru semnul $\subset$.

5. FUNDAMENTAREA TEORIEI MULȚIMILOR

Se pune problema construirii ca sistem logic organizat a propozițiilor despre mulțimi. Prin aceasta însă ne apropiem atît de mult de logică încît deosebirea este greu de făcut. Într-adevăr, cele trei feluri de afirmații cu care operează teoria mulțimilor $a \in M$, $M \subset N$ și $M \equiv N$ (aceasta din urmă nu este specifică) corespund cu trei forme fundamentale de propoziții: propoziții de apartenență, propoziții de incluziune și propoziții de identitate. Or, toate acestea generează raționamente ireductibile (am văzut că raționamentele sînt condi-

*) O definiție uzuală a izomorfismului este următoarea. Fie S_1 și S_2 sisteme. Vom spune că S_1 și S_2 sînt izomorfe dacă și numai dacă:

a) oricărui obiect din S_1 îi corespunde un și numai un obiect din S_2 (și reciproc),

b) oricărei operații din S_1 îi corespunde o și numai o operație din S_2 (și reciproc)

c) oricărei relații din S_1 îi corespunde o și numai o relație din S_2 (și reciproc)

d) oricărui rezultat al unei operații din S_1 îi corespunde un și numai un rezultat din S_2 (și reciproc).

ționate de forma propoziției). Prin urmare, afirmațiile cu privire la legăturile logice dintre „aserțiunile" teoriei mulțimilor se dovedesc a fi formulări ale legilor de raționare cu propoziții de forma amintită! (Se înțelege că semnul identității va fi luat aci doar ca o aplicație particulară și că ne interesează relațiile specifice $\in$, $\subset$).

Nu ne vom ocupa aci de sistemul axiomatic al teoriei mulțimilor, cititorul dispune în acest sens de excelenta carte a lui Fraenkel și Bar-Hillel „Bazele teoriei mulțimilor" (limba engleză sau rusă).

6. LOGICA CLASELOR

Noțiunea de clasă a fost introdusă în paragraful 1. Vom arăta în continuare cum operatorii $\cap$, $\cup$, $\subset$ aplicați la clase pot fi definiți cu ajutorul relației $\in$, a operatorilor propoziționali și a cuantorilor. Se înțelege că vor fi aserțiuni logice numai acelea care sînt raportate la legătura dintre aserțiuni asupra claselor, restul fiind, ca să spunem așa, aserțiuni ale teoriei mulțimilor aplicate la clase.

(1) $$F \cap G \equiv \hat{x}\,(x \in F \cdot x \in G).$$

Aceasta înseamnă că termenul (nepropozițional) $F \cap G$ (care desemnează o clasă formată prin intersecție) este prin definiție identic cu termenul care desemnează pe acei x astfel că $x \in F$ și $x \in G$. Este foarte important ca cititorul să rețină că (1) este o relație între termeni și nu între aserțiuni. Semnul „$\hat{x}$" este un corespondent pentru operatorul abstracției (λx) din calculul predicatelor și el corespunde de asemenea cu operatorul „$x|$" din algebra mulțimilor (vezi „$x|x$ are proprietatea P"). Expresiile formate cu ajutorul operatorilor abstracției ($\hat{x}$) deși cuprind aserțiuni nu sînt în totalitatea lor aserțiuni. Prin urmare expresia „acei x pentru care $x \in F$ și $x \in G$" va fi considerată un termen, altfel identitatea (1) n-ar avea sens.

(2) $$F \cup G \equiv \hat{x}\ (x \in F \vee x \in G).$$

(3) $$F \subset G \equiv \forall x\ (x \in F \rightarrow x \in G).$$

Expresia (3) leagă aserțiuni și deși este o definiție ea poate fi tratată și ca regulă de deducție care ne permite să trecem de la aserțiunea de o anumită formă la aserțiunea de altă formă.

$$\frac{F \subset B}{\forall x \ (x \in F \rightarrow x \in G)}$$

Într-adevăr, de la aserțiunea „numerele pare sînt cuprinse în clasa numerelor întregi" se poate infera pe baza acestei reguli „dacă un număr este par atunci el este și întreg" (cuantorul universal este subînțeles). Făcînd trecerea de la un formalism la altul definițiile (1)—(3) pot fi considerate ca aparținînd unui metalimbaj. În consecință regula de deducție este și ea o metaregulă.

Cu ajutorul operatorilor propoziționali putem reda anumite proprietăți ale incluziunii.

(4) $(F \subset G \cdot G \subset H) \rightarrow F \subset H$ (tranzitivitatea).

Expresia (4) este echivalentul extensional al modului *Barbara* cu premise inversate. Dacă dăm corespondentele extensionale ale judecăților A, E, I, O putem construi toate silogismele și de asemenea reda o serie de alte inferențe. Ne vom limita la termenii S, P, M a căror condiție de a nu fi *vizi* (clase vide) se păstrează și aci și este redată prin $S \not\equiv \varnothing$, $P \not\equiv \varnothing$, $M \not\equiv \varnothing$.

(5a) $A \equiv S \subset P$

(5b) $E \equiv S \subset \bar{P}$

(5c) $I \equiv S \cap P \not\equiv \varnothing$

(5d) $O \equiv S \cap \bar{P} \not\equiv \varnothing$

(6) $M \subset P,\ S \subset M \vdash S \subset P$ (*Barbara*)

(7) $M \subset \bar{P},\ S \subset M \vdash S \subset \bar{P}$ (*Celarent*)

(8) $M \subset P,\ S \cap M \not\equiv \varnothing \vdash S \cap P \not\equiv \varnothing$ (*Darii*)

(9) $M \subset \bar{P},\ S \cap M \not\equiv \varnothing \vdash S \cap \bar{P} \not\equiv \varnothing$ (*Ferio*)

etc.

În cuvinte ultimul mod (9) poate fi citit „din faptul că M este cuprins în non-P și S se intersectează cu M se deduce că S se intersectează cu non-P". Prin urmare, dacă am introduce o relație de aserțiune corespunzătoare operatorului $\cap$, de exemplu aserțiunea „... se intersectează cu — — —", am putea scrie judecățile I și 0 fără exprimarea explicită a diferenței față de clasa vidă. De asemenea este de observat că în locul virgulei putem introduce „•", iar în locul semnului „$\vdash$" semnul „$\rightarrow$".

(10) $S \subset P \rightarrow \overline{P} \subset \overline{S}$ (contrapoziția)

(11) $S \subset P,\ S \not\equiv \emptyset,\ P \not\equiv \emptyset \vdash S \cap P \not\equiv O$ (subalternarea).

(12) $S \subset P \rightarrow \overline{S \subset \overline{P}}$ (obversiunea).

Deoarece prin pătratul logic avem echivalențele

(13) $I \equiv \overline{E}$ și $O \equiv \overline{A}$

vom putea scrie

(14) $I = \overline{S \subset \overline{P}}$ și $O = \overline{S \subset P}$.

Ca urmare, modurile pot fi scrise fără a mai enunța explicit condiția restrictivă (ea rămînînd pur și simplu legată în general de utilizarea simbolurilor S, P, M).

(15) $M \subset P,\ \overline{S \subset \overline{M}} \vdash \overline{S \subset \overline{P}}$ (*Darii*).

(16) $M \subset \overline{P},\ \overline{S \subset \overline{M}} \vdash \overline{S \subset P}$ (*Ferio*)

Se înțelege că aceleași inferențe pot fi redate și cu ajutorul apartenenței. Ele vor fi pur și simplu retranscrieri din calculul predicatelor dacă ținem seama de definiția:

(17) $x \in F \equiv Fx$

În acest fel modul *Barbara* va deveni:

(18) $\forall x\,(x \in M \rightarrow x \in P), \forall x\,(x \in S \rightarrow x \in M) \vdash \forall x\,(x \in$ $\in S \rightarrow x \in P)$

În concluzie silogistica poate fi *interpretată* ca un fragment al logicii claselor sau al logicii predicatelor (desigur cu sacrificarea unui anumit specific).

Logica claselor poate fi dezvoltată paralel cu logica predicatelor dacă mai departe vom „reduce" relațiile la clase n-tuple (adică fiecărei relații n-are îi vom asocia o clasă n-tuplă, anume clasa elementelor care satisfac relația respectivă).

Deși logica claselor este pe deplin izomorfă cu logica predicatelor putînd fi considerată ca modelul extensional al calculului predicatelor, nu este totuși de prisos ca ea să fie formulată distinct. Într-adevăr, adesea avem nevoie de forme de exprimare extensională și prin urmare trebuie să știm după ce reguli logice operăm cu aceste forme de exprimare. Or, în acest scop regulile înseși trebuie formulate adecvat în „limbajul modelului"[1].

[1] Ca bibliografie în limba română pentru teoria mulțimilor am utilizat între altele lucrarea lui Gr. C. Moisil, „Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor".

VI



LOGICA RELAȚIILOR

1. OBSERVAȚII GENERALE

Teoria relațiilor studiază legile de raționare din punctul de vedere al proprietăților generale ale relațiilor. În calculul predicatelor noi am considerat numai funcțiile propoziționale n-adice unele în relație cu altele fără a ne întreba asupra proprietăților relațiilor exprimate în aceste funcții. De exemplu, considerînd relația x R y, scrisă R (x, y) pe noi ne-a interesat numai funcția „R (x, y)" nu și relația ca atare x R y. Nu ne-am pus întrebarea dacă, de exemplu, o astfel de relație este simetrică, reflexivă or tranzitivă (deși ne-am întîlnit cu asemenea proprietăți în cazul operatorilor propoziționali).

În cele ce urmează ne vom ocupa în special de așa numitele relații diadice (sau binare) între indivizi (de un fel oarecare). Vom nota indivizii în continuare cu x, y, z (variabile individuale) și relațiile cu P, Q, R, ... și vom scrie P (x, y), Q (x, y, z), R (x, y, t), ... Relațiile diadice de forma R (x, y) vor fi scrise și x R y (cum s-a arătat mai sus) și se va citi „individul x este în relația R cu y".

Exemple de relații.

a) Relații diadice, R (x, y): $x > y$, $x = y$, $x < y$, $x \neq y$, $a \| b$, $\frac{a}{b}$ (în matematică), la sud de ... (exemplu: „București este la sud de Ploiești") ... după (c după b).

b) Relații triadice R (x, y, z). Un exemplu de astfel de relație este relația „între": „x se află între y și z" (unde x, y, z sînt puncte).

b) Relaţie tetradică R (x, y, z, t). O astfel de relaţie este „relaţia de schimb" din economia politică. Ea se formulează astfel „x schimbă cu y obiectul z pentru obiectul t".

2. RELAŢII DIADICE: x R y

În expresia „x R y" x şi y reprezintă termenii relaţiei, iar R relaţia. Între termeni, x reprezintă *antecedentul* relaţiei, iar y *succedentul* (consecventul). Mulţimea valorilor pe care se defineşte x va purta numele de *domeniu* al relaţiei, iar mulţimea valorilor lui y — *codomeniu.*

Dacă x R y reprezintă o relaţie, X va fi domeniul şi Y codomeniul relaţiei dacă şi numai dacă funcţia propoziţională „x R y" va deveni sau adevărată sau falsă cînd x va lua valori din X şi y va lua valori din Y. La rîndul său perechea (X, Y) se va numi *cîmpul* relaţiei. Altfel spus cîmpul relaţiei este reuniunea domeniului şi a codomeniului.

Cîmpul relaţiei este *omogen* dacă domeniul şi codomeniul sînt formate din acelaşi tip de obiecte, astfel că unul şi acelaşi obiect poate să apară într-un caz ca antecedent, iar în altul ca succedent.

Cîmpul relaţiei este *eterogen* cînd nu sînt îndeplinite condiţiile pentru a fi omogen (adică domeniul şi codomeniul nu sînt formate din acelaşi tip de obiecte). Fie relaţia $x > y$. Ea este o relaţie între numere reale, cîmpul ei este omogen. De exemplu, $2 > 1$, $3 > 2$, $1 > \frac{1}{2}$. De aci se vede cum aceleaşi numere pot ocupa poziţii diferite în relaţie.

În relaţia „x este soţul lui y" cîmpul este eterogen, căci X $\equiv$ mulţimea bărbaţilor, iar Y $\equiv$ mulţimea femeilor. Convenim ca în general să notăm domeniul şi codomeniul cu literele mari latine corespunzătoare literelor mici care formează cele două variabile individuale ale expresiei. Vom avea deci şirurile corespondente:

$$x,\ y,\ z,$$
$$X,\ Y,\ Z,$$

Cîmpul relaţiei va fi notat prin reuniune, exemplu: $X \cup Y$, $X \cup Z$, . . . sau pe scurt cu litera C.

Dacă x R y atunci $C \equiv X \cup Y$. Noţiunea de *cîmp* (şi deci de domeniu şi codomeniu) poate fi luată într-un sens mai restrîns — mulţimea perechilor care satisfac relaţia.

3. PROPRIETĂŢI FORMALE ALE RELAŢIILOR

a. **Reflexivitatea.** O relaţie R este reflexivă dacă şi numai dacă pentru orice x are loc x R x.

Următoarele relaţii sînt reflexive: $x = y$, $x \parallel y$ (paralelism) căci $x = x$ şi $x \parallel x$.

b. **Simetria.** O relaţie R este simetrică dacă şi numai dacă pentru orice x şi pentru orice y are loc x R $y \equiv y$ R x. Relaţiile de mai sus sînt simetrice deoarece este adevărat $(x = y) \equiv (y = x)$ şi $(x \parallel y) \equiv (y \parallel x)$. Relaţia de perpendicularitate este de asemenea simetrică, căci $x \perp y \equiv y \perp x$. La fel relaţiile „$x$ corespondează cu y," „x este văr cu y", „x este compatriot cu y".

c. **Tranzitivitatea.** O relaţie R este tranzitivă dacă şi numai dacă pentru orice x, pentru orice y şi pentru orice z are loc (x R $y \cdot x$ R z) $\rightarrow x$ R z.
Astfel relaţiile $=$, $<$, $>$, $\subset$, $\rightarrow$, $\parallel$, x precede pe y.
Astfel pentru $x \parallel y$ propoziţia devine: dacă $x \parallel y$ şi $y \parallel z$ atunci $x \parallel z$.
Alte proprietăţi se obţin din negarea celor de mai sus. Convenim să folosim prefixul *ne-* pentru a desemna proprietăţile obţinute prin negarea parţială (adică ele nu au loc în genere, dar pot avea loc uneori) şi prefixele *a-*, *in-*, *i-* pentru a marca negarea totală (nu există obiecte pentru care să aibă loc proprietatea).

d) Prin negarea parţială obţinem proprietăţile *nereflexivitate*, *nesimetrie* şi *netranzitivitate*.

Astfel, relaţia „x învinovăţeşte pe y", „x critică pe y", „x denunţă pe y", „x descrie pe y" sînt relaţii nesimetrice, căci pot avea loc şi cazurile x învinovăţeşte pe x ($=$ x se învinovăţeşte pe sine), x critică pe x ($=$ x îşi face autocritica), x descrie pe x ($=$ x se autodescrie). Este evident că astfel de relaţii trebuie raportate la mulţimea actelor descrise. Or, nu este universal adevărată nici una din propoziţiile de reflexivitate enunţate.

Relaţiile următoare sînt nesimetrice,„x scrie lui y", „x informează pe y", „x critică pe y". Într-adevăr, se poate ca y să-i scrie lui x, y să informeze pe x şi y să critice pe x, dar acestea nu sînt universal valabile.

Următoarele relaţii sînt netranzitive: „x este prietenul lui y", „x este vecin imediat cu y", „x corespondează cu y".

Din faptul că x este prieten cu y şi y este prieten cu z nu decurge în mod universal că x este prieten cu z (oricît de dorit ar fi), deşi pot să fie cazuri de „transmitere" a relaţiei de prietenie. Un exemplu foarte obişnuit de relaţie netranzitivă este acesta: echipa de fotbal x învinge echipa de fotbal y, la rîndul său y învinge echipa z. Toţi pasionaţii ştiu că nu este obligatoriu ca x să învingă pe z.

e. Prin negarea totală a proprietăţilor a)—c) obţinem *ireflexivitate*, *asimetrie*, *intranzitivitate*.

Relaţiile $x < y$, $x > y$, x este tatăl lui y sînt evident ireflexive şi asimetrice. Relaţia x este tatăl lui y este şi intranzitivă.

Fiecare relaţie diadică poate fi descrisă complet sub raportul proprietăţilor indicate mai sus. Astfel, relaţia $x < y$ este ireflexivă, asimetrică şi tranzitivă, relaţia $x \leqslant y$ este nereflexivă, nesimetrică şi tranzitivă. Relaţia x critică pe y este nereflexivă, nesimetrică şi netranzitivă. Relaţia $x = y$ este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

f. **Univocitatea.** O relaţie este univocă dacă şi numai dacă fiecărui antecedent îi corespunde un şi numai un consecvent (succedent). Astfel, relaţia de succesor în sistemul lui Peano este univocă, adică pentru x succede pe y este adevărat că oricărui y îi corespunde un singur x care-l urmează imediat. Tot univocă este şi relaţia x este fiul doamnei y, căci fiecărui fiu îi corespunde o singură mamă.

g. **Biunivocitatea.** O relaţie este biunivocă atunci cînd este univocă în ambele sensuri, adică fiecărui antecedent îi corespunde un singur consecvent şi fiecărui consecvent un singur antecedent. Astfel relaţia *succesor* este biunivocă în cîmpul numerelor întregi (pozitive şi negative).

h. Putem vorbi, de asemenea, de relaţii *neunivoce*, de exemplu, $x > y$, nu există un singur număr care să fie mai mare ca y sau un singur număr care să fie mai mic ca x.

Proprietăţile de mai sus pot fi definite şi numai cu ajutorul simbolurilor. Pentru a le indica expres trebuie să introducem predicate de ordinul doi (adică predicate de predicate): *Ref*

(reflexiv), *Sym* (simetric) *Trans* (transitiv), *Neref*(nereflexiv), *Nesym*, *Netrans*, *Iref*, *Asym*, *Intrans*. Definițiile vor fi:

(1) $Ref\ (R) \equiv \forall x\ x\,R\,x$

(2) $Sym\ (R) \equiv \forall x \forall y\ (x\,R\,y = y\,R\,x)$

(3) $Trans\ (R) \equiv \forall x \forall y \forall z\ ((x\,R\,y \cdot x\,R\,z) \rightarrow x\,R\,z)$

(4) $Neref\ (R) \equiv \overline{Ref\ (R)} \equiv \overline{\forall x\ x\,R\,x}$

(5) $Nesym\ (R) \equiv \overline{Sym\ (R)} \equiv \overline{\forall x \forall y\ (x\,R\,y = y\,R\,x)}$

(6) $Netrans\ (R) \equiv \overline{Trans\ (R)} \equiv \overline{\forall x \forall y \forall z ((x R y \cdot y R z) \rightarrow x R z)}$

(7) $Iref\ (R) \equiv \overline{\exists x\ x\,R\,x}$

(8) $Asym\ (R) \equiv \overline{\exists x \exists y\ (x\,R\,y = y\,R\,x)}$

(9) $Intrans\ (R) \equiv \overline{\exists x \exists y \exists z(\ (x\,R\,y \cdot y\,R\,z) \rightarrow x\,R\,z)}$

(10) $Un\ (R) \equiv \forall x \forall y\ (x\,R\,y \rightarrow \forall z\ (x\,R\,z \rightarrow y \equiv z))$

(În cazul (10) „*Un*" este o prescurtare pentru *univoc*.)

Observăm că în cele de mai sus am adoptat un „limbaj" intensional (al predicatelor). Se poate de asemenea vorbi despre relații în „limbajul extensional" (al mulțimilor și claselor). Unii autori chiar amestecă cele două moduri de exprimare, ceea ce este cel puțin inestetic.

4. OPERAȚII CU RELAȚII

Ca și cu propozițiile și clasele cu relațiile putem efectua o serie de operații. Aceste operații sînt denumite fie cu termeni din logica propozițiilor, fie cu termeni din logica claselor, fie cu termeni speciali. Alegînd un termen noi vom indica în paranteză și alții. În vederea simplificării scrierii relațiile vor fi reprezentate uneori prin P, Q, R,   fără a se mai indica termenii (x, y).

a. **Negația relației** (complementara). Se va nota ca și mai înainte cu ajutorul „—" și se va scrie $\overline{R}$ sau $\overline{x\,R\,y}$. Astfel,

negaţia relaţiei $x > y$ este $\overline{x > y}$, adică $x \leqslant y$. Negaţia relaţiei „x este prietenul lui y" este „x nu este prietenul lui y", altfel spus „x nu se află în relaţie de prietenie cu y".

Considerată extensional negaţia se va numi „complementara relaţiei" şi se va defini astfel:

(11) $\bar{R} \equiv \hat{x}\hat{y}\,(\overline{< x, y > \in R})$ sau

$\bar{R} \equiv \hat{x}\hat{y}\,(< x, y > \notin R)$

Aceasta se citeşte „negaţia lui R înseamnă acei x şi acei y astfel că perechea $<x, y>$ nu aparţine clasei R. Prin aceasta relaţia este redusă la o mulţime de perechi.

Se poate de asemenea utiliza o definiţie extensională dar care raportează funcţia propoziţională (predicativă) la clasa de elemente:

(12) $\bar{R} \equiv \hat{x}\hat{y}\,(\overline{x\,R\,y})$

$\bar{R}$ este identic cu acei x şi y pentru care nu are loc $x\,R\,y$, sau $\bar{R}$ este mulţimea perechilor $<x, y>$ pentru care nu are loc $x\,R\,y$). În raport cu extensiunea relaţiile pot fi clasificate în două: *universale* (totale) şi *vide* (ca şi în teoria mulţimilor aceste noţiuni pot fi luate în sens absolut sau relativ, noi le vom defini aci în sens relativ).

(13) $R_u \equiv \forall x \forall y\,(x\,R\,y)$ (R_u: „R este universală")

(14) $R_\Phi \equiv \forall x \forall y\,(\overline{x\,R\,y})$ (R_Φ: „R este vidă")

Relaţia *compusă* „$x = x$ şi $y = y$" (va fi discutată mai jos) este o relaţie universală (în universul numerelor). Relaţia de identitate: „$x \equiv x$ şi $y \equiv y$" este universală în orice univers, la fel $x \equiv x$.

Relaţia „$x \neq x$ şi $y \neq y$" precum şi $x \neq x$, $x > x$ sînt vide. Relaţia $x \not\equiv x$ este vidă în orice univers. Identităţile (13) şi (14) pot fi scrise respectiv şi

(15) $R_u \equiv \forall x \forall y(<x, y> \in R)$

(16) $R_\Phi \equiv \forall x \forall y(<x, y> \notin R)$

Se înţelege că $\forall x \forall y(<x, y> \notin R) \equiv \overline{\exists x \exists y(<x, y> \in R)}$.

b. **Conjuncția relațiilor** (intersecția, produsul logic). Se notează aci prin $x(RQ)y$ sau mai pe scurt RQ și se definește:

(17) $x(R\ Q)\ y \equiv x\ R\ y \cdot x\ Q\ y$.

Echivalente cu (17) sînt și definițiile:

(18) $RQ \equiv \hat{x}\hat{y}\ (\langle x, y\rangle \in R \cdot \langle x, y\rangle \in Q)$.

(19) $RQ = \hat{x}\hat{y}\ (x\ R\ y \cdot x\ R\ y)$.

În (18) și (19) conjuncția apare de asemenea ca o mulțime de perechi și poate fi numită „intersecția relațiilor" (de unde scrierea $R \cap Q$).

Din relațiile:

x este prieten cu y și x este coleg cu y

formăm relația: x este prieten și coleg cu y; din relațiile $x \leqslant y$ și $x \geqslant y$ formăm relația $x = y$; din $x \geqslant y$ și $x \neq y$ formăm $x > y$, din x este mai în vîrstă ca y și x este fratele lui y formăm: x este fratele mai mare al lui y.

c. **Produsul relativ** (compoziția sau înmulțirea relațiilor). Este un anumit gen de conjuncție a relațiilor. Se notează de obicei cu | și se scrie $R|Q$ sau $x\ (R|Q)\ y$. (Citește R înmulțit cu Q).

(20) $R|Q \equiv \exists z\ (x\ R\ z \cdot z\ Q\ y)$.

Sau echivalentă cu (20):

(21) $R|Q = \hat{x}\hat{y}\ (\exists z\ (x\ R\ z \cdot z\ Q\ y))$.

Astfel relația x este unchiul lui y este compusă din relațiile x frate cu z și z este tatăl lui y. De asemenea, din x este tatăl lui z și z este soțul lui y putem forma x este socrul lui y. În cazul în care relația R este compusă cu sine (o dată sau de mai multe ori) avem *puterea relațiilor*. Vom scrie puterea unei relații folosind exponenți ca în aritmetică, adică R^n.

(30) $R|R \equiv R^2$, $(R|R)|R \equiv R^3$ etc.

Ca exemplu, vom considera relația x este tatăl lui y.

Vom avea lanțul de relații:

x este tatăl lui y şi

y este tatăl lui z şi

z este tatăl lui u şi

u este tatăl lui t etc.

Produsul (compoziția) de x este tatăl lui y şi y este tatăl lui z va da x este bunicul lui z, produsul dintre x este bunicul lui z şi z este tatăl lui u va da x este străbunicul lui u etc. Notînd cu T relația de paternitate (adică „.. este tatăl lui — — —") vom putea scrie pe scurt:

$$T|T \equiv \text{Bunic (pe scurt B)}$$

$$(T|T)|T \equiv B|T = \text{Străbunic (SB)}$$

$((T|T)|T)|T \equiv (B|T)|T \equiv SB|T \equiv$ Stră-străbunic etc.

Sau $T^2 = B$, $T^3 = SB$ etc.

Fie relația $x = y$. Prin compoziție (produs) vom avea $x = y$ și $y = z$ formează $x = z$. Dar aceasta este chiar tranzitivitatea egalității. Deci putem defini tranzitivitatea prin puterea relațiilor.

(31) *Trans* (R) $\equiv R \Rightarrow R^2$

Produse relative interesante dau anumite relații cu relațiile de identitate ($=$, $\equiv$). Notînd astfel de relații cu I vom avea o formă specială de produs relativ $R|I$. De exemplu $X \subset Y$ și $X \equiv Z$ dă produsul relativ $X \subset Z$. La fel din $x \equiv z$ şi z are proprietatea F obținem prin produs că x are proprietatea F. Altfel, scris, $x \equiv z$ şi $z \in F$ dă $x \in F$.

d. **Disjuncția relațiilor** (reuniunea, suma logică a relațiilor). O vom nota ca şi în logica propozițiilor cu $\vee$ şi vom scrie $x\ (R \vee Q)y$ sau $R \vee Q$.

(32) $R \vee Q \equiv x R y \vee x Q y$.

Din relațiile:

x este văr cu y şi x este prieten cu y

vom obține: x este văr sau prieten cu y.

(În vorbirea obişnuită auzim adesea „x este prieten sau poate şi rudă cu y", ceea ce reprezintă o relaţie compusă prin disjuncţie).

Din relaţiile $x = y$ şi $x > y$ obţinem $x \geqslant y$, iar din x îl vizitează pe y şi x corespondează cu y formăm x îl vizitează sau corespondează cu y. Extensional vom vorbi de reuniunea relaţiilor şi o vom defini în mod corespunzător.

e. **Sumă relativă.** Analog cu produsul relativ putem vorbi de sumă relativă. Convenim s-o notăm cu W,(RW,Q, x(RWQ)y).

(33) $\mathrm{R\,W\,Q} \equiv \exists z\,(x\,\mathrm{R}\,z \vee z\,\mathrm{Q}\,y)$.

Din x este prieten cu y şi y este văr cu z obţinem prin sumă relativă x este prieten sau văr cu z (Se înţelege că suma astfel formată poate să fie adevărată sau nu). Nu trebuie să considerăm formarea sumei relative ca fiind o *derivare logică* din cele două relaţii (observaţii analoge şi pentru conjuncţia şi produsul relativ). În unele cazuri putem avea o derivare logică (implicaţie), în altele nu.

Un alt exemplu de sumă relativă este acesta: din $x = y$, şi $y > z$ obţinem $x \geqslant z$ (ceea ce este o *însumare* adevărată). Prin însumare repetată a aceleeaşi relaţii avem

((R W R) W R) W R etc. Aceasta poate fi scris pe scurt ca nR (unde n este relaţia luată de n ori). Repetarea unei astfel de relaţii măreşte gradul de nedeterminare al propoziţiei respective. Exemplu: Ion este mai în vîrstă ca Gheorghe sau Gheorghe este mai în vîrstă decît Constantin. Totuşi o asemenea însumare repetată poate fi utilizată pentru descrierea unei situaţii complexe. Un jurist poate să descrie astfel o situaţie nedeterminată „ceva s-a întîmplat, or x l-a bătut pe y ori y l-a bătut pe z" (acestea părîndu-i-se singurele ipoteze plauzibile, avînd în vedere, să zicem că z este prea slab pentru a-l bate pe x sau pe y).

f. **Implicaţia relaţiilor** (subsumare, incluziune).

(34) $\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{Q} \equiv \forall x \forall y\,(x\,\mathrm{R}\,y \rightarrow x\,\mathrm{Q}\,y)$

Relaţia $x > y$ implică relaţia $x \neq y$.

g. **Echivalenţa relaţiilor.**

(35) $\mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{Q} \equiv \forall x \forall y\,(x\,\mathrm{R}\,y \equiv x\,\mathrm{Q}\,y)$ sau

(36) $\mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{Q} \equiv \forall x \forall y((x\,\mathrm{R}\,y \rightarrow x\,\mathrm{Q}\,y) \cdot (x\,\mathrm{Q}\,y \rightarrow x\,\mathrm{R}\,y))$.

Cu alte cuvinte echivalența relațiilor înseamnă două relații care au loc pentru aceeași mulțime de obiecte (mai precis pentru aceeași mulțime de perechi).

Relațiile „x este mai în vîrstă ca y" și „x primește buletinul înaintea lui y" sînt relații echivalente. Se consideră uneori și următoarea operație (evident extensională) denumită *restrîngerea* (limitarea) *cîmpului relației la mulțimea A*. O notăm prin R_A și scriem:

(37) $R_A \equiv x R y \cdot (x \in A \cdot y \in A)$ sau

$R_A \equiv x R y \cdot (\langle x, y \rangle \in A)$

Se înțelege că restrîngerea se face în raport cu cîmpul inițial. De exemplu $x > y$ poate avea loc dacă (x, y) aparțin mulțimii numerelor reale. În mod obișnuit în matematică (x, y) se referă la mulțimea numerelor, iar în logică au un cîmp și mai larg — mulțimea indivizilor.

h. **Conversiunea relațiilor** (sau inversiunea). Termenul „conversiune" nu este aplicat în mod univoc și uneori se confundă sensurile. Vom avea cel puțin trei înțelesuri diferite:

a) conversiunea în înțelesul logicii tradiționale (unde poate fi afectată cuantificarea relației, respectiv a propoziției), de exemplu, conversa judecății „Toți S sînt P" va fi „Unii P sînt S";

b) conversiunea în înțelesul de inversare a relației și a termenilor (de la $x > y$ se trece la $y < x$),

c) conversiunea în sens de simetrica relației (reciproca), de exemplu, trecerea de la $x > y$ la $y > x$.

În cazul conversiunii a) propozițiile „Toți S sînt P" și „Unii P sînt S" nu sînt logic echivalente căci se poate ca prima să fie falsă și a doua adevărată (ex. „Toți studenții sînt sportivi" este falsă, în timp ce „Unii sportivi sînt studenți" este adevărată). În cazul conversiunii b) avem pur și simplu aceeași relație „citită" invers. Într-adevăr, între a spune că „x este mai mare ca y" și a spune că „y este mai mic decît x" nu este logic nici o diferență. Dimpotrivă, în cazul conversiunii c), $x > y$ și $y > x$ nu sînt logic echivalente. Conversiunea b) este evident bazată pe anumite noțiuni contrarii. Exemplu „mai mare" cu „mai mic", „întreg", „jumătate", „tatăl", „fiul", „bunic", „nepot" ș.a. Cînd Jorgensen exem-

plifică conversiunea c) prin „x este tatăl lui y" şi „y este fiul lui x" el confundă evident conversiunea în sensul c) cu conversiunea în sensul b).

Comun este pentru toate cele trei conversiuni inversarea ordinii termenilor, în aşa fel că vom defini conversiunea în genere astfel: Spunem că Q (y, x) este conversa lui R (x, y), dacă şi numai dacă Q $(y, x) \equiv R(y, x)$. Dacă în plus se schimbă (sau se poate schimba cuantificarea) vom avea conversiunea clasică (adică a), dacă se schimbă şi orientarea relației vom avea conversiunea b), dacă nu se schimbă decît ordinea termenilor vom avea conversiunea c). Prin urmare, conversiunea c) este cea mai slabă. Putem conveni să numim conversiunea b) ***reorientare a relației***, iar conversiunea c) simplu ***conversiune*** sau ***inversiune*** sau ***transpunere.***

(38) Dacă Q (y, x) este o reorientare a relației R (x, y) atunci Q $(y, x) \equiv$ R (x, y).

Proprietatea (38) nu este valabilă nici pentru conversiunea clasică, nici pentru transpunere (conversiune in genere).

În virtutea lui (38) relațiile următoare sînt logic identice:

$$x > y \equiv y < x$$

$$X \subset Y \equiv Y \supset X$$

x este la dreapta lui $y \equiv y$ este la stînga lui x.
x este la nord de $y \equiv y$ este la sud de x.
x este tatăl lui $y \equiv y$ cste fiul lui x.

Comun reorientării şi conversiunii este faptul că nu se presupune o afectare a cuantificării. În continuare nc vom ocupa de conversiunea pur şi simplu, adică de transpusă şi o vom nota cu $\breve{R}$.

(39) $x \breve{R} y \equiv y R x$ sau $\breve{R} \equiv y R x$ sau
$\breve{R} \equiv \hat{x}\hat{y}(y R x)$

Conversa unei relații de puterea n (adică R^n) va fi scrisă R^{-n}, adică:

40) $\breve{R}^n = R^{-n}$.

Pe baza conversiunii putem defini simetria astfel:

(41) Sym $(R) \equiv (R \equiv \breve{R})$

Augustus de Morgan cel care a pus bazele teoriei relațiilor a formulat următoarele proprietăți ale conversiunii:

(42) $\breve{\breve{R}} \equiv R$ (conversa conversei este relația inițială).

(43) Dacă $Q \equiv \breve{R}$ atunci $\overline{Q} \equiv \overline{\breve{R}}$

(44) Dacă $Q \equiv \overline{R}$ atunci $\breve{Q} \equiv \breve{\overline{R}}$

(45) $\overline{\breve{R}} = \breve{\overline{R}}$ (negarea conversei este identică cu conversa negației).

(46) Dacă $R \Rightarrow Q$ atunci $\breve{R} \Rightarrow \breve{Q}$.

Exemple pentru (42)—(46). Conversa relației $x > y$ va fi $y > x$, iar conversa acesteia va fi $x > y$ (adică relația inițială). Relațiile $x > y$ și $y > x$ sînt reciproc converse, la fel $\overline{x > y}$ și $\overline{y > x}$. Relația $x > y$ se neagă cu $\overline{x > y}$, prin urmare $y > x$ se va nega cu $\overline{y > x}$. În loc de $\overline{x > y}$ putem scrie $x \leqslant y$. În acest caz vom spune că dacă $x > y$ se neagă reciproc cu $x \leqslant y$ atunci $y > x$ se va nega reciproc cu $y \leqslant x$ (analog putem reformula exemplul pentru (43)).

Fie $x > y$ relația R, $y > x$ va fi $\breve{R}$, $y \leqslant x$ va fi $\overline{\breve{R}}$. Negația lui $x > y$ va fi $x \leqslant y$, conversa negației $y \leqslant x$ ($\breve{\overline{R}}$), ceea ce este identic cu $\overline{\breve{R}}$.

Pentru (46) vom avea: dacă $x > y \Rightarrow x \neq y$ atunci $y > x \Rightarrow y \neq x$.

În ce privește proprietățile celorlalte operații luate în parte sau una în raport cu alta cititorul le poate stabili pe baza celor spuse deja în logica propozițiilor.

Aci ne vom opri la anumite proprietăți ale conversiunii în raport cu celelalte operații.

(47) Dacă q este unul din operatorii $\cdot$, $\vee$, $|$, W, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ atunci sînt valabile teoremele de forma:

$$\overset{\smile}{R\,q\,Q} \equiv \breve{R}\,q\,\breve{Q}$$

(A se observa asemănarea cu legile lui de Morgan).

O definiţie foarte importantă pe care o redăm aci este aceea care spune că „relaţia există dacă şi numai dacă există termenii ei".

(48) $E!R \equiv \exists x \exists y\, x R y$. Apoi formule relative la puteri.

(49) $(R \dot{\vee} Q)^1 \equiv R^1 \vee Q^{-1}$

(50) $(R \mid Q)^1 \equiv R^1 \cdot Q^{-1}$

(51) $R^m | R^n \equiv R^{m+n}$

(52) $(R^m)^n \equiv R^{mn}$

(53) $(R^{-m})^n \equiv R^{-mn}$

(54) Asym $(R) \equiv R \Rightarrow \overline{R}^{-1}$

(55) Intrans $(R) \equiv R^2 \Rightarrow \overline{R}$

Exerciţii :

1. Să se studieze noţiunile de domeniu, codomeniu, şi cîmp în raport cu conversiunea;
2. Să se studieze proprietăţile celorlalte operaţii (inclusiv una în raport cu alta);
3. Să se studieze proprietăţile conversiunii prin reorientarea relaţiei (o astfel de conversă poate fi notată, de exemplu, astfel $\vec{R}$);
4. Avînd în vedere definiţia (40) să se reformuleze teoremele privitoare la conversă cu ajutorul scrierii R^{-n}. Este evident că deoarece relaţia diadică va fi R^1, conversa ei se va scrie cu R^{-1}. De aci:

$$(R^{-1})^{-1} = R \text{ etc.}$$

5. CLASIFICAREA RELAŢIILOR

Clasificarea relaţiilor se face în funcţie de proprietăţile amintite. În acest sens vom distinge relaţiile elementare de relaţiile compuse (cu ajutorul anumitor operatori). Cazul cel mai interesant de relaţii compuse este acela cînd avem „lanţuri" („reţele" sau „sisteme") de relaţii, cum ar fi, de

exemplu, sistemul relațiilor de rudenie. Se înțelege că studiul lanțului de relații va depinde de proprietățile relațiilor elementare și de tipul de operatori care se aplică pentru compunerea relațiilor. Vom studia aci cele mai importante clase de relații (elementare).

a. Relațiile de echivalență.

1. O relație R este de echivalență (sau altfel exprimat, de identitate) dacă, pentru ea are loc:

Ref (R) și *Sym* (R) și *Trans* (R).

Ca exemple ale relației de echivalență avem: identitatea în general ($\equiv$), identitățile particulare (egalitatea, echivalența logică etc.), paralelismul, congruența, biunivocitatea (echipolența), sinonimia, asemănarea, a fi (în, pe, cu) același (aceeași) ș.a. De exemplu, pentru ultimul tip avem „a fi la același curs", „a fi în aceeași grupă", „a avea același rest prin împărțirea lui N", „a avea aceeași familie". În general, dacă o relație este de echivalență în raport cu o mulțime M ea este de echivalență și în raport cu orice *limitare* (restrîngere) a mulțimii M. (Limitarea mulțimii M nu trebuie confundată cu *diviziunea* ei în M mulțimi. De exemplu, mulțimea studenților este divizată în grupe. Limitarea corespunde cu operația de *determinare* în genere, în timp ce diviziunea este o multiplă determinare). Totalitatea mulțimilor între care se poate stabili o relație de echivalență formează *clasa de echivalență*. Astfel spus: clasa de echivalență a unei mulțimi M este clasa tuturor mulțimilor echivalente (în același sens) cu M. Am văzut că numărul cardinal al unei mulțimi M este clasa tuturor mulțimilor echipolente cu M. Prin urmare, numărul cardinal este o clasă de mulțimi echipolente. (Este indispensabil ca întreaga clasă de echivalențe să fie luată în raport cu una și aceeași relație de echivalență). Analog definim „direcția": se numește direcție a unei drepte clasa tuturor dreptelor paralele cu dreapta dată (adică o clasă de echivalențe în raport cu relația de paralelism).

2. Dacă M_E este o clasă de echivalențe corespunzătoare lui M atunci:

a) orice mulțime din M_E este echivalentă cu M

b) orice mulțime echivalentă cu M face parte din M_E (deci și M).

Definițiile date numărului cardinal și direcției pe baza relației de echivalență poartă numele de definiții„prin abstracție". Ideea de „clasă de echivalențe" poate fi raportată, de asemenea, la o relație sau o expresie. De exemplu, clasa tuturor expresiilor echivalente (în sensul valorii logice) cu o propoziție adevărată formează o clasă a propozițiilor adevărate.

b. Relaţiile de ordine. Am văzut deja că unele relaţii sînt orientate (adică între termenii lor există o ordine). Din punctul de vedere al ordinii relațiile se împart în a) relații de preordine și b) relații de ordine.

3. O relație R este de preordine dacă pentru ea are loc *Ref*(R) și *Trans* (R). În acest sens relațiile de echivalență sînt de preordine.

4. O relație R este de ordine (parțială) dacă pentru ea are loc *Ref* (R) și *Nesym* (R) și *Trans* (R).

5. O relație de ordine (parțială) strictă este acea relație **R** pentru care are loc: *Iref* (R) și *Asym* (R) și *Trans* (R). Relația de implicație ($\rightarrow$, $\Rightarrow$) este o relație de ordine în sensul (4), la fel relația $\leqslant$. Relația $<$ este de ordine în sensul (5).

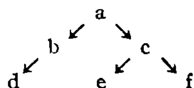
6. REPREZENTAREA RELAȚIILOR

O relație x R y poate fi reprezentată fie scriind lista perechilor care o satisfac, fie prin vectori, fie prin matrice. Fie, de exemplu, relația „x este părintele lui y" aplicată la mulțimea membrilor (a, b, c, d, e, f) unei familii.

a) Lista perechilor care satisfac relația poate fi, de exemplu, următoarea:

a R b	(a este părintele lui b,
a R c	a este părintele lui c etc.)
b R d	
c R e	
c R f	

b) Reprezentarea vectorială va fi următoarea:



(săgeata arată orientarea relației și între ce membri are loc această relație).

c) Reprezentarea matriceală va fi următoarea:

┌→	a	b	c	d	e	f
a		v	v			
b				v		
					v	v
d						
f						

(semnul ┌→ arată orientarea tabelului, iar semnul v arată că relația are loc între membrii care se află în dreptul căsuței respective).

Ca și teoria mulțimilor, teoria relațiilor poate găsi aplicații foarte diferite.

VII

LOGICA POLIVALENTĂ

1. IDEEA DE POLIVALENŢĂ

Pînă acum propoziţiile noastre erau considerate ca avînd una din cele două valori (adevăr, fals). Încă Aristotel a arătat că există situaţii în care nu putem decide pe care din cele două valori va trebui s-o atribuim propoziţiei. Analizînd propoziţia „mîine va fi o bătălie navală", Aristotel scrie (în *Despre interpretare*) că „în unele cazuri există contingenţă şi atunci afirmaţia nu este nici mai adevărată, nici mai falsă decît negaţia". El mai scrie că „Una din cele două propoziţii în astfel de cazuri trebuie să fie adevărată şi cealaltă falsă, dar noi nu putem spune precis care anume este adevărată sau falsă, ci trebuie să lăsăm alternativa nedecisă". George Boole socotise logica cu două valori (1, 0) ca un caz limită al raportului de probabilitate $\frac{k}{l}$ (unde k este numărul cazurilor favorabile, iar l numărul cazurilor posibile). Se produce astfel un fel de „gradare" sau înmlădiere a valorilor logice fundamentale (adevărul, falsul). Iată cum exprimă Gh. Peirce o asemenea idee: „Conform cu logica obişnuită, orice enunţ este sau adevărat sau fals, nici o altă distincţie nu se mai poate face. Aceasta este, cum ar spune geometria, concepţia descriptivă; concepţia metrică ar spune că orice enunţ este mai mult sau mai puţin fals şi că aceasta este o chestiune de grad".

Matematica operează de multă vreme cu propoziţii care sînt „aproximativ adevărate". De exemplu, ea dă pentru

raportul π o valoare aproximativă, 3,14 şi deci propoziţia care spune că „π are valoarea 3,14" este o propoziţie aproximativ adevărată. Chiar şi în logică au apărut cazuri de apreciere a expresiilor care nu se reduc la adevăr, fals. De exemplu, funcţiile propoziţionale sînt realizabile, irealizabile (universal false) sau universal adevărate. În demonstrarea proprietăţilor sistemului axiomatic ne-am folosit de mai mult de două semnificaţii şi, deşi nu le-am definit, am spus deja că ele pot fi luate ca nişte cazuri particulare de adevăr şi fals. Prin această multiplicare a valorilor logice apare justificat să se vorbească de o logică cu un număr oarecare de valori. Aceasta va fi logica polivalentă (sau, altfel spus, *n*-valentă).

Cercetînd îndeaproape conceptul de polivalenţă (v. lucrarea noastră *Logică şi adevăr*) noi considerăm că la baza ei stau următoarele principii:

1. Orice mulţime de *n* valori logice ($n > 2$) apare ca o particularizare a ideilor fundamentale de *adevăr* şi *fals*.

2. În orice logică trivalentă este suprimată cel puţin legea terţului exclus (în formularea că „orice propoziţie este sau adevărată sau falsă a treia posibilitate nu există").

3. Orice logică *n*-valentă presupune în fundamentul ei metateoretic logica bivalentă (căci pentru orice valoare nou introdusă este adevărat că ea are sau nu are loc pentru propoziţia dată, a treia posibilitate neexistînd).

Fondatorii logicii polivalente sînt polonezul Jan Lukasiewicz (1920) şi americanul E. L. Post (1921). În cele ce urmează vom expune rezumativ cele mai cunoscute sisteme de logică polivalentă*.

2. LOGICA TRIVALENTĂ A LUI LUKASIEWICZ

Lukasiewicz a pornit de la analiza propoziţiilor modale de posibilitate („Este posibil ca — — —"). În conformitate cu această analiză el introduce trei valori pe care le notează cu 1 (adevăr), 0 (fals) şi 1/2 (neutral sau posibil).

* Pentru expunere am folosit în principal lucrările: A. A. Zinoviev [37], S. C. Kleene [22], J. Lukasiewicz [24].

Definițiile funcțiilor fundamentale sînt următoarele:

(1) $Np = 1 - p$

(2) $Kpq = \min(p, q)$

(3) $Apq = \max(p, q)$

(4) $Cpq = \min(1, (1 - p + q))$

Definiții pot fi de asemenea date cu ajutorul matricelor. Se pot folosi matrice de tipul celor utilizate în logica bivalentă sau de tipul celor utilizate deja în demonstrarea proprietăților sistemelor axiomatice, ultimele sînt mai comode.

Np

p	Np
1	0
0	1
1/2	1/2

Kpq

$p \setminus q$	1	0	1/2
1	1	0	1/2
0	0	0	0
1/2	1/2	0	1/2

Apq

$p \setminus q$	1	0	1/2
1	1	1	1
0	1	0	1/2
1/2	1	1/2	1/2

Cpq

$p \setminus q$	1	0	1/2
1	1	0	1/2
0	1	1	1
1/2	1	1/2	1

Lukasiewicz ia ca bază operatorii C, N introducînd prin definiție operatorii A și K.

(5) $Apq = CCpqq$

(6) $Kpq = NANpNq$

Legile necontradicției și terțului exclus nu mai apar în logica lui Lukasiewicz. Într-adevăr,

$ApNp = 1$ pentru $p = 1$

$ApNp = 1$ pentru $p = 0$

$ApNp = 1/2$ pentru $p = 1/2$

La fel $NKpNp = 1$ pentru $p = 1$

$NKpNp = 1/2$ pentru $p = 1/2$

Metateoreme

(7) Dacă A este o tautologie în logica bivalentă $\bar{A}$ nu poate fi tautologie în logica lui Lukasiewicz.

(8) Dacă A este tautologie în logica lui Lukasiewicz atunci A este tautologie și în logica bivalentă.

(9) Orice matrice bivalentă este o submatrice a matricei trivalente corespunzătoare.

Slupecki a introdus o funcție specială Tp = 1/2 care nu poate fi redată prin (C, N) ceea ce înseamnă că sistemul CN nu este funcțional complet. Tp în analogie cu tautologia și contradicția poate însemna o funcție care ia pretutindeni valoarea 1/2 (ceea ce s-ar putea numi o funcție „identic-neutrală”). Corespunzător operatorilor CN a fost construit un sistem deductiv incomplet (Tarski, Wajsberg), după cum corespunzător sistemului CNT a fost construit un sistem deductiv complect (Slupecki). Ulterior Lukasiewicz introduce o logică tetravalentă. Funcțiile clasice (bivalente) sînt notate cu C^2, N^2 (funcții de bază), iar cele tetravalente cu C^4, N^4. Ca urmare se obțin următoarele matrice:

p	N^4p
1	4
2	3
3	2
4	1

C^4pq	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

Lukasiewicz și Tarski au descris apoi cu ajutorul funcțiilor CN o logică infinitistă (cu un număr infinit de valori) în care valorile sînt reprezentate prin numere reale de la 0 la 1 (inclusiv). Definițiile pentru N și C sînt respectiv (1) și (4) date mai sus.

3. LOGICA LUI POST

Post descrie o logică cu n valori. Ca funcții de bază el consideră negația (ciclică) și alternativa pe care le definește astfel.

(1) $N^1p = p + 1$ dacă $1 \leqslant p \leqslant n - 1$

$N^1p = 1$ dacă $p = n$

(2) $Apq = \min (p, q)$

(Pentru $n = 2$ sistemul este cel bivalent)

Alte funcții: N^2 (negația simetrică) și K.

(3) $N^2p = n - p + 1$

(4) $Kpq = \max (p, q)$

Tabelul pentru negația N^1.

p	$N^1 p$
1	2
2	3
n — 1	n
n	1

Se numește tautologie în sensul lui Post o expresie care are totdeauna o asemenea valoare i încît $1 \leqslant i \leqslant s$, unde $1 \leqslant s \leqslant n$ (se poate ca $s > 2$). (Prin urmare, o oarecare diferență față de definiția dată de logica clasică și chiar de către Lukasiewicz care preluase definiția clasică).

4. LOGICA LUI BOCIVAR*

Bocivar construiește o logică trivalentă cu scopul de a analiza paradoxele din teoria mulțimilor. Bocivar admite trei valori R (adevăr), F (fals), S (absurd). Propozițiile sînt împărțite în clasice (interioare), neclasice (exterioare).

Propoziții clasice	*Propoziții neclasice*
A	A este adevărat
non A	A este fals
A și B	A este adevărat și B este adevărat
A sau B	A este adevărat sau B este adevărat
dacă A atunci B	dacă A este adevărat atunci B este adevărat
	A este absurd.

Metateoreme

(1) Oricărei propoziții clasice îi corespunde una neclasică.
(2) Există o propoziție neclasică căreia nu-i corespunde nici o propoziție clasică (aceasta este de forma: „A este absurd"). Termenul „absurd" este explicat de Bocivar prin „fără conținut".

* Se expune după Bocivar [5].

Simboluri

Mulțimea valorilor R, F, S.

Variabile propoziționale p, q, r,

Functori clasici: $\sim$ (negația), $\cap$ (conjuncția), $\cup$ (disjuncția), $\supset$ (implicația), $\supset\subset$ (echivalența).

Functori neclasici: $\vdash$ (asertarea), $\neg$ (negația), $\wedge$ (conjuncția), $\vee$ (disjuncția), $\rightarrow$ (implicația), $\leftrightarrow$ (echivalența), $\equiv$ (identitatea, echipolența), $\downarrow$ (absurditatea), — (negația asertării).

(3) Se definesc inițial $\sim p$, $p \cap q$, $\vdash p$, $\neg$ p. (Asertarea $\vdash$ p înseamnă „p peste adevărat").

p	$\sim p$
R	F
F	R
S	S

$p \cap q$	R	F	S
R	R	F	S
F	F	F	S
S	S	S	S

p	$\vdash p$
R	R
F	F
S	F

p	$\neg p$
R	F
F	R
S	F

Restul funcțiilor se definesc, după procedeul cunoscut, din negație și conjuncție. Pentru funcțiile neclasice definițiile sînt următoarele:

(4) $p \wedge q = \vdash p \cap \vdash q$

(5) $p \vee q = \vdash p \cup \vdash q$

(6) $p \rightarrow q = \vdash p \supset \vdash q$

(7) $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \cap (q \rightarrow p)$

(8) $p \equiv q = (p \rightarrow q) \cap (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

(9) $\downarrow p = \sim (\vdash p \cup \neg p)$

(10) $\bar{p} = \sim \vdash p$.

Din matrice decurg unele teoreme importante.

(11) Dacă p este absurd atunci

a) $\sim p$ este absurd,

b) $\vdash p$ este fals,

c) $\neg$ p este fals.

(12) A $\cap$ S este echivalent cu S.

(13) Dacă un argument cste absurd atunci întreaga formulă clasică este absurdă.

(14) Nici o formulă clasică nu e demonstrabilă în calculul lui Bocivar.

(15) Nici o formulă contradictorie nu e demonstrabilă în calculul lui Bocivar.

Teoreme (*tautologii*)

(16) $p \rightarrow p \cap p$

(17) $p \cap q \rightarrow q \cap p$

(18) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \cap r \rightarrow q \cap r)$

(19) $((p \rightarrow q) \cap (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(20) $q \rightarrow (p \rightarrow q)$

(21) $(p \cap (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

(22) $p \rightarrow (p \vee q)$

(23) $p \vee q \rightarrow q \vee p$

(24) $((p \rightarrow r) \cap (q \rightarrow r)) \rightarrow$
$\rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

(25) $\bar{p} \rightarrow (p \rightarrow q)$

(26) $(p \rightarrow q \cap p \rightarrow \bar{q}) \rightarrow \bar{p}$

(27) $p \vee \bar{p}$

(28) $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} = \mathrm{R}$

(29) $\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} = \mathrm{R}$

(30) $\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{S} = \mathrm{R}$

(31) $p \leftrightarrow \vdash p$

(32) $\sim p \leftrightarrow \neg p$

(33) $p \cap q \leftrightarrow p \wedge q$

(34) $p \cup q \rightarrow p \vee q$

(35) $(p \supset q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(36) $\downarrow p \equiv \downarrow \sim p$

(37) $\downarrow p \rightarrow \neg \neg p$

(38) $\downarrow p \rightarrow \neg \vdash p$

Formulele (16)—(27) sînt izomorfe cu o serie de tautologii clasice. De exemplu: (16) este izomorfă cu $p \supset (p \cap p)$. Prin urmare, în locul relației de echivalență apare o relație nouă de *izomorfism*. Bocivar nu spune cît de departe merge acest izomorfism, tocmai de aceea ne permitem să formulăm următoarea propoziție.

(39) Dacă pentru orice formulă din calculul clasic al propozițiilor există o formulă izomorfă cu ea în calcul propozițiilor neclasice (dat de Bocivar) atunci toate legile clasice sînt valabile în sensul izomorfismului în logica lui Bocivar.

Alte formule (tautologii):

(40) $\sim(\overline{p \cup \sim p})$

(41) $\neg\neg(p \cup \sim p)$

(42) $\neg\downarrow(p \vee \neg p)$

(43) $\downarrow(p \cup \sim p) \equiv \neg(p \vee \neg p)$

(44) $\downarrow(p \cup \sim p) \equiv \downarrow p$

(45) $(p \equiv \sim p) \equiv \downarrow p$

(46) $(p \leftrightarrow \sim p) \equiv \downarrow p$

(47) $(\sim \downarrow p \rightarrow (p \leftrightarrow \sim p)) \equiv \downarrow p$

(48) $((p \cup \sim p) \rightarrow (p \leftrightarrow \sim p)) \equiv \downarrow p$

(49) $(p \leftrightarrow \neg p) \equiv \downarrow p$

(50) $(\vdash p \equiv \neg p) \equiv \downarrow p$

Formulele (45)—(50) sînt importante pentru analiza paradoxelor.

(51) $(p \equiv \downarrow p) \equiv \neg p$

(52) $(p \equiv \downarrow p) \leftrightarrow \sim p$

(53) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(54) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(55) $\downarrow p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(56) $(p \equiv q) \rightarrow (\sim p \equiv \sim q)$

(57) $(p \equiv q) \rightarrow (\downarrow p \equiv \downarrow q)$

Sistemul (16)—(27) poate fi considerat ca sistem intuiționist.

Reguli de deducție.

I. Regula substituției.

II. Dacă A este demonstrat și $A \supset B$ este demonstrat atunci B este demonstrat.

IV. Dacă A, B sînt demonstrate atunci $A \cap B$ este demonstrată. Nu ne vom ocupa aci de sistemul axiomatic. (Cititorul poate construi ușor un sistem cu axiome neindependente).

Bocivar dezvoltă în continuare și calculul funcțional (calculul predicatelor).

La semnele de mai sus se adaugă:

x, y, z,	variabile individuale,
f, g, φ, ψ,	variabile predicative.
(x), $(\&x)$	cuantori clasici
$(\forall x)$, $(\exists x)$	cuantori neclasici
(x)f(x):	„pentru orice x x are însușirea f"
$(\&x)$f(x):	„există x astfel că are însușirea f"
$(\forall x)$f(x):	„pentru orice x f(x) este adevărat"
$(\exists x)$f(x):	„există x astfel că f(x) este adevărat"

Definiţii :

(58) $(\&x)\mathrm{f}(x) = \sim (x) \sim \mathrm{f}(x)$

(59) $(\exists x)\mathrm{f}(x) = (\&x) \vdash \mathrm{f}(x)$

(60) $(\forall x)\mathrm{f}(x) = (x) \vdash \mathrm{f}(x)$

5. LOGICA LUI KLEENE*

Kleene porneşte de la consideraţii asupra procesului de rezolvare (algoritmic, recursiv). El deosebeşte între sensul slab şi sensul tare al legăturilor propoziţionale (operatorii). Logica sa trivalentă defineşte în sensul tare operatorii. El porneşte de la trei valori *t*, *f*, *u* pe care le defineşte în mai multe feluri dar definiţiile se dovedesc logic echivalente.
t: „adevăr", „adevăr algoritmic stabilit", „adevăr cunoscut"
f: „fals", „fals algoritmic stabilit", „fals cunoscut".
u: „nedeterminat", „nici adevărul nici falsul nu sînt stabilite algoritmic", „necunoscut" („ nu e cunoscut dacă e adevăr sau fals", „nu e esenţial ce este"). Se definesc funcţiile principale cu ajutorul matricelor.

p	$\bar{p}$
t	*f*
f	*t*
u	*u*

$p \cdot q$	*t*	*f*	*u*
t	*t*	*f*	*u*
f	*f*	*f*	*f*
u	*u*	*f*	*u*

$p \vee q$	*t*	*f*	*u*
t	*t*	*t*	*t*
f	*t*	*f*	*u*
u	*t*	*u*	*u*

$p \rightarrow q$	*t*	*f*	*u*
t	*t*	*f*	*u*
f	*t*	*t*	*t*
u	*t*	*u*	*u*

$p = q$	*t*	*f*	*u*
t	*t*	*f*	*u*
f	*f*	*t*	*u*
u	*u*	*u*	*u*

O interpretare importantă pe care o putem adăuga la cele indicate de Kleene este următoarea *t* = identic-adevărat, *f* = identic-fals, *u* = realizabil. (Este vorba de cele trei clase în care se divid funcţiile logice). Altfel spus tautologic (T), contradictoriu (C) şi realizabil (R) formează o mulţime de valori {T, C, R} care satisface logica lui Kleene. Lăsăm demonstrarea acestui fapt pe seama cititorului.

Logica lui Kleene diferă de logica lui Lukasiewicz în două puncte (*u*, *u*) dă pentru p → q valoarea *u* la Kleene şi valoarea *t* la Lukasiewicz (la fel cu echivalenţa). Ca urmare a acestui fapt *p* → *p* este lege în logica lui Lukasiewicz, dar nu în logica

* Se expune după Kleene [22].

lui Kleene, căci $u \rightarrow u = u$. Diferite alte considerații metateoretice asupra logicii lui Kleene se găsesc în cartea noastră „Logică și adevăr".

6. LOGICA LUI REICHENBACH*

În legătură cu situația din microfizică Reinchenbach consideră că putem avea trei atitudini față de propozițiile fizicii: să le declarăm prin verificare adevărate sau să le declarăm false sau dacă nu putem să le declarăm nici adevărate, nici false atunci vom spune că sînt nedeterminate. Vom nota cele trei valori cu 1 (adevăr verificat), 2 (fals verificat), 3 (imposibil de determinat). O serie de enunțuri ale fizicii vor intra în clasa celor nedeterminate (vezi, de exemplu, propozițiile indeterminabile ale lui Heisenberg). Reichenbach introduce funcțiile: N^1p (negația cilică), N^2p (negația diametrală), N^3p (negația completă), Kpq (conjuncția), Apq (alternativa), C^1pq (implicația standard), C^2pq (echivalența standard), R^2pq (echivalența alternativă). Definițiile se dau prin matrice după cum urmează:

p	N^1p	N^2p	N^3p
1	2	3	2
2	3	2	1
3	1	1	1

p q	Kpq	Apq	C^1pq	C^2pq	C^3pq	R^1pq	R^2pq
1 1	1	1	1	1	1	1	1
2 1	2	1	2	3	2	2	3
3 1	3	1	3	3	3	3	3
1 2	2	1	1	1	2	2	3
2 2	2	2	1	1	2	1	1
3 2	3	2	3	1	2	2	3
1 3	3	1	1	1	2	3	3
2 3	3	2	1	1	2	2	3
3 3	3	3	1	1	2	1	1

* Se expune după Zinoviev [37].

Tautologii

(1) R^1pp

(2) $R^1N^2N^2p$

(3) $R^1pN^1N^1N^1p$

(4) $R^1N^3pN^3N^3N^3p$

(5) $R^1N^3pAN^1pN^1N^1p$

(6) $AAN^1pN^1N^1p$

(7) $R^1ApN^1N^1pN^3p$

(8) N^3KpN^3p

(9) N^3KpN^1p

(10) N^3KpN^2p

Legile (6) şi (7) sînt legile excluderii cvartului. Principiul necontradicţiei pentru N^3: (8)—(10).

(11) $N^2Kpq = AN^2pN^2q$

(12) $N^2Apq = KN^2pN^2q$

(13) $R^1C^1N^2pqC^1N^2qp$

(14) $R^1C^2N^3pqC^2N^3qp$

Cititorul poate verifica singur, cu ajutorul matricelor care egi sînt valabile din logica clasică şi pentru care operatori.

7. LOGICA INTUIŢIONISTĂ*

„Logica noastră, scrie Heyting, are de a face numai cu propoziţii matematice". Pornind de la concluziile trase de Brouwer (1908) în legătură cu limitarea terţului exclus în ce priveşte aplicarea la mulţimile infinite, Heyting elaborează o logică a infinitului (fără terţul exclus). În conformitate cu această concepţie, orice enunţ (propoziţie matematică) se referă la un *obiect construit* sau cel puţin la *metoda care ne permite să-l construim.* Astfel propoziţia „2 + 2 = = 3 + 1" trebuie înţeleasă astfel: „eu am îndeplinit construcţiile desemnate prin „2 + 2 şi „3 + 1" şi am găsit că ele duc la acelaşi rezultat" sau trebuie înţeleasă astfel: „eu am metoda de a realiza construcţiile desemnate prin „2 + 2" şi „3 + 1",

* Se expune după Heyting [17], [18].

și de a arăta că ele duc la același rezultat". Dacă noi am efectuat construcția sau avem metoda de a o efectua vom spune că „propoziția este satisfăcută în mod intuiționist". Ca urmare expresiile propoziționale vor căpăta următoarele interpretări.

a. Negația $\neg p$. O propoziție p poate fi asertată dacă și numai dacă s-a realizat construcția (sau există metoda de a o realiza). Se spune că construcția *demonstrează* propoziția p, că ea este o *demonstrație* a lui p (18; p. 123). Negația propoziției „non-p", „nu este adevărat p" sau „este fals p" înseamnă „presupunînd adevărul lui p noi ajungem la contradicție". Această negație, după cum precizează Heyting, este o negație *de jure* nu *de facto*. Ea mai poate fi citită „este imposibil că", „nu se poate ca" în timp ce negația factuală spune „noi nu sîntem în drept să afirmăm că", „nimeni nu știe că" etc.

Deoarece orice afirmație matematică se poate da în forma „Eu am efectuat în intelect construcția A", negația matematică va fi „Eu am efectuat în intelect construcția B care duce la contradicție presupunerea că se poate duce pînă la capăt construcția A". Dimpotrivă negația factuală ar spune „Eu nu am efectuat în intelect construcția A" ceea ce nu este de forma afirmației matematice (18; p. 28—29).

Faptul că $a = b$ duce la contradicție (că e contradictoriu) se va scrie $a \neq b$. În legătură cu aceasta Brouwer (1925) a formulat următoarea teoremă: dacă $a \neq b$ este contradictoriu, atunci $a = b$. În ce privește noțiunea de *contradicție* ea este o noțiune primă (luată ca nedefinită). În mod practic, scrie Heyting, ea poate fi redusă la forma $1 = 2$. El dă exemplul următor: „$p = \sqrt{2}$ este rațional". O astfel de propoziție cere construcția unor asemenea întregi ca a și b astfel că $a^2 = 2b^2$. Lucrurile pot fi astfel tratate încît a și b să fie reciproc prime. Apoi a este par, astfel că a^2 se împarte la 4 și la fel $2b^2$. În acest fel b este par și 2 este divizorul comun atît pentru a cît și pentru b, ceea ce contrazice faptul că a și b sînt reciproc prime. Contradicția poate lua forma: cel mai mare divizor comun pentru a și b este în același timp 1 și 2 (18; p. 123).

Înțelegînd prin „construcție", așa cum arată Heyting, atît construcția efectivă cît și existența metodei de construcție, vom defini în continuare celelalte forme de propoziții după cum urmează. A aserta = a da construcția.

b. **Conjuncţia**: $p \wedge q$. Conjuncţia $p \wedge q$ este asertată atunci şi numai atunci cînd atît p cît şi q sînt asertate, adică pentru ambele sînt date construcţiile.

c. **Disjuncţia**: $p \vee q$ este asertată cînd cel puţin una din cele două propoziţii este asertată (în mod intuiţionist).

d. **Implicaţia**: $p \rightarrow q$. „Implicaţia poate fi afirmată atunci şi numai atunci cînd noi dispunem de o astfel de construcţie r care fiind asociată cu orice construcţie care demonstrează pe p (în presupunerea că ultima a fost îndeplinită), ar da în mod automat o construcţie care demonstrează pe q. Cu alte cuvinte, construcţia lui p împreună cu construcţia r ar forma demonstraţia lui q" (18; p. 123—124).

Pentru asertare se introduce semnul $\vdash$. În acest fel putem scrie: $\vdash p \vee q$ dacă şi numai dacă $\vdash p$ sau $\vdash q$.

e. Heyting a axiomatizat (1930) logica intuiţionistă pe baza a 11 axiome:

Ax_1 $\vdash p \rightarrow (p \wedge p)$

Ax_2 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

Ax_3 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$

Ax_4 $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Ax_5 $\vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$

Ax_6 $\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Ax_7 $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$

Ax_8 $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

Ax_9 $\vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

Ax_{10} $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Ax_{11} $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p$.

Teoreme

1. $\vdash p \to \neg\neg p$
2. $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
3. $\vdash (p \to q) \to (\neg\neg p \to \neg\neg q)$
4. $\vdash \neg p \to \neg\neg\neg p$
5. $\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p$
6. $\vdash \neg (p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$
7. $\vdash (\neg p \wedge \neg q) \to \neg (p \vee q)$
8. $\vdash (\neg p \vee \neg q) \to \neg (p \wedge q)$
9. $\vdash \neg\neg (p \vee \neg p)$
10. $\vdash \neg\neg (p \wedge q) \to (\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$
11. $\vdash (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \to \neg\neg(p \wedge q)$
12. $\vdash (\neg\neg p \vee \neg\neg q) \to \neg\neg (p \vee q)$

Nu sînt teoreme $p \vee \neg p$, $\neg\neg p \to p$, $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$, $\neg (p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$.

Gr. C. Moisil a demonstrat următoarele două teoreme în logica lui Heyting.

13. $\vdash (\neg\neg p \wedge \neg\neg (p \to q)) \to \neg\neg p$
14. $\vdash (\neg\neg (p \to q) \wedge \neg\neg (q \to r)) \to \neg\neg (p \to r)$

Johanson I. dezvoltă (1936) un calcul fără axioma 10, așa-numitul „calcul minimal". Axioma 10 este explicată de Heyting astfel. „Presupunem că $\vdash \neg p$, adică noi am obținut contradicție din presupunerea că construcția lui p poate fi realizată. Atunci obținerea acestei contradicții poate fi considerată într-un anumit sens ca o construcție care fiind asociată cu construcția lui p (care construcție nu există!) dă demonstrația lui q" (18; p. 127).

f. **Logica predicatelor** este de asemenea dezvoltată în conformitate cu exigențele intuiționiste. Stabilim mai întîi semnificația cuantorilor $(\forall x)$, $(\exists x)$. Fie Fx (predicat de x) unde x ia valori dintr-un domeniu *matematic* Q.

$\forall x Fx$ înseamnă că „Fx este adevărat pentru orice x din Q", sau, cu alte cuvinte, că „noi avem o metodă generală de construcție care ne permite ca în legătură cu orice element α ales din Q să obținem o construcție pentru Fa" (18; p. 128).

Astfel, metoda inducției matematice (care satisface exigențele impuse de intuiționiști) ne permite să demonstrăm dacă Fn are loc pentru orice n.

$\exists x Fx$ înseamnă că a fost construit efectiv elementul a din Q pentru care are loc Fa (18; p. 128).

Axiomele predicatelor (care vor fi anexate la Ax_1 — Ax_{11}) vor fi cele date de Hilbert-Ackermann. Regulile de deducție sînt de asemenea aceleași.

$Ax_{12} \vdash \forall x Fx \rightarrow Fy$

$Ax_{13}\ Fy \rightarrow \exists x Fx$

Teoreme

15. $\vdash \forall x Fx \rightarrow \neg \exists x Fx$

16. $\vdash \exists x Fx \rightarrow \neg \forall x \neg Fx$

17. $\vdash \forall x \neg Fx \rightarrow \neg \exists x Fx$

18. $\vdash \neg \exists x Fx \rightarrow \forall x \neg Fx$

19. $\vdash \exists x \neg Fx \rightarrow \neg \forall x Fx$

20. $\vdash \forall x \neg\neg Fx \rightarrow \neg \exists x \neg Fx$

21. $\vdash \neg \exists x \neg Fx \rightarrow \forall x \neg\neg Fx$

22. $\vdash \neg\neg \forall x \neg\neg Fx \rightarrow \neg \exists x \neg Fx$

23. $\vdash \neg\neg \forall x Fx \rightarrow \neg \exists x \neg Fx$

24. $\vdash \neg\neg \forall x Fx \rightarrow \forall x \neg\neg Fx$

25. $\vdash \neg\neg \exists x Fx \rightarrow \neg \forall x \neg Fx$

26. $\vdash \neg \forall x \neg Fx \rightarrow \neg\neg \exists x Fx$

27. $\vdash \exists x \neg\neg Fx \rightarrow \neg \forall x \neg Fx$

28. $\vdash \exists x \neg\neg Fx \rightarrow \neg\neg \exists x Fx$

Implicațiile inverse pentru (15), (16) și (19) nu au loc. Heyting scrie că „una dintre cele mai uimitoare însușiri ale logicii intuiționiste este că implicația inversă (pentru 24.) nu are loc. Acest lucru este cu atît mai demn de remarcat cu cît formula calculului propozițional prin limitarea domeniului de semnificație a lui x la mulțimi finite este adevărată" (18; 129—130). În conformitate cu logica intuiționistă se produce o selecție a metodelor de demonstrație, unele metode fiind respinse ca neintuiționiste sau ***neconstructive.*** Astfel demonstrația prin absurd este considerată ca neconstructivă.

8. INTERPRETAREA LOGICII INTUIȚIONISTE

Logica lui Heyting este o logică polivalentă cu o infinitate de valori. O interpretare specială a fost dată de Kolmogorov prin așa-numitul „calcul al problemelor". Se presupune că conceptul de problemă „este intuitiv clar, la fel „soluția problemei". Expresiile sînt definite după cum urmează:

(1) $p, q, r,$ vor desemna probleme.

(2) Dacă p și q sînt probleme atunci:

(a) $\neg p$ va însemna: presupunînd soluția lui p dată să se ajungă la o contradicție

(b) $p \wedge q$: să se rezolve cele două probleme p și q,

(c) $p \vee q$: să se rezolve cel puțin una din problemele p și q.

(d) $p \rightarrow q$: presupunînd soluția lui p dată să se rezolve q (sau: să se reducă soluția lui q la soluția lui p).

(3) Dacă $x, y, z,$ vor fi probleme nespecificate și $p(x)$, $q(y)$, ... desemnează probleme al căror sens depinde de valoarea lui x atunci:

(a) $\forall x p(x)$ înseamnă: să se indice o metodă generală de rezolvare a lui $p(x)$ pentru orice valoare particulară a lui x.

(b) $\exists x p(x)$ înseamnă: să se indice o metodă prin care $p(x)$ este rezolvat pentru cel puțin un caz particular a. (Explicația aceasta este omisă de Kolmogorov însă ea derivă din cele de mai sus). Rezolvarea problemelor se face printr-un șir finit de pași. Corespunzător problemelor se introduc funcții

de probleme, ceea ce constituie obiectul logicii problemelor. Simbolul $\vdash$ va desemna generalitatea.

Axiomă. $p \rightarrow (p \wedge q)$ înseamnă: să se reducă soluția problemei $p \wedge q$ la p. Dacă avem o metodă pentru a rezolva această problemă putem scrie: $\vdash p \rightarrow (p \wedge p)$ ceea ce înseamnă că problema este soluționată.

Axiomă. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$ este astfel interpretată de Kolmogorov: admițînd că soluția lui q a fost dinainte redusă la soluția lui p să se reducă soluția lui $q \wedge r$ la soluția lui $p \wedge r$. Fie dată soluția lui $p \wedge r$, aceasta înseamnă că atît soluția lui p cît și soluția lui r sînt date; din soluția lui p putem deduce, conform ipotezei, soluția lui q, deoarece soluția lui r este deja dată, obținem soluția celor două probleme q și r, deci soluția lui $q \wedge r$ (21; 363). Formula $p \vee \neg p$ nu este o problemă deoarece nu există o metodă universală care să nu permită să rezolvăm pentru fiecare caz problema p sau să deducem o contradicție din p (adică să rezolvăm pe $\neg p$).

VIII

LOGICA MODALĂ

1. IDEEA DE MODALITATE

Logica modală* este înrudită cu logica polivalentă. În timp ce logica polivalentă modalizează valorile logice (necesar adevărat, posibil adevărat etc.) logica modală modalizează forma propozițiilor. Astfel se consideră propoziții de forma „Este posibil *p*", „Este necesar *p*", „Este imposibil *p*", „Este contingent *p*", „Nu este posibil *p*" etc. Legătura între valorile modale și propozițiile modale iese ușor în evidență dacă procedăm la o distingere între enunțuri interioare și exterioare așa cum face Bocivar. De exemplu, propoziției „Este posibil *p*" îi corespunde „Este posibil ca *p* să fie adevărat".

Ca modalități principale sînt considerate: *necesitatea*, *posibilitatea*, *imposibilitatea*, *contingența*. Între aceste modalități există o legătură logică astfel că unele pot fi definite prin altele. Întemeietorul logicii modale moderne este logicianul englez Clarence Irving Lewis (1883—1964). Lewis a pornit de la o serie de observații făcute asupra implicației materiale. Deoarece implicația materială ($p \rightarrow q$) nu reprezintă complet relația de deducție ($p \vdash q$) este necesar să se introducă o nouă relație de implicație. Aceasta este așa-numita implicație strictă ($p \prec q$). Sensul ei este acesta „nu este *posibil* să fie adevărat *p* și non-*q*". Prin urmare, pentru definirea unei astfel de implicații intervine modalitatea („posibil"). Pentru construirea logicii modale se introduc semne speciale care indică mo-

* Se expune după C. I. Lewis [23], I. M. Bochenski [4], Gr. C. Moisil [26], [27].

dalitatea („operatorii modali"). Astfel Lewis notează posibilul cu $\Diamond$ și scrie $\Diamond p$ (citește „este posibil p"). Pentru necesitate s-a introdus (ulterior) semnul $\Box$, astfel că se scrie $\Box p$ (citește „este necesar p"). În limbajul lui Lukasiewicz operatorii modali sînt notați cu Lp (p este necesar), Mp (p este posibil), Up (p este imposibil) și Zp (p este contingent). Prin afectarea într-un anumit fel a operatorilor propozițional cu modalități Lewis construiește un sistem propozițional al operatorilor „stricți" numit și „sistemul implicației stricte" (dat fiind rolul special pe care-l are implicația strictă în acest sistem).

2. DEFINIREA MODALITĂȚILOR

Considerînd ca nedefinită expresia Lp („p este necesar") vom defini restul modalităților după cum urmează.

(1) $\mathrm{M}p \equiv \mathrm{NLN}p$

(2) $\mathrm{U}p \equiv \mathrm{LN}p$

(3) $\mathrm{Z}p \equiv \mathrm{NL}p$

(4) $\mathrm{L}p \equiv \mathrm{NMN}p$

(5) $\mathrm{U}p \equiv \mathrm{NM}p$

(6) $\mathrm{Z}p \equiv \mathrm{KMN}p\mathrm{M}p$

Folosind semnele $\Diamond$ (posibil), $\Box$ (necesar), $\sim$ (negația) vom avea respectiv

(1)′ $\Diamond p \equiv \sim \Box \sim p$

(2)′ $\Box \sim p$ (este imposibilul)

(3)′ $\sim \Box p$ (este contingentul)

Apoi:

(4)′ $\Box p \equiv \sim \Diamond \sim p$

(5)′ $\sim \Diamond p$ (imposibilul)

(6)′ $\Diamond \sim p \cdot \Diamond p$ (contingentul)

(Acest sistem este totodată o logică polivalentă).

(7) $p \prec q \equiv \sim \Diamond (p \cdot \sim q)$

(8) $p \prec q \equiv \sim \Diamond \sim (\sim (p \cdot \sim q))$

(9) $p \circ q \equiv \sim(p \prec \sim q)$ („p consistent cu q)

(10) $p = q \equiv ((p \prec q) \cdot (q \prec p))$ (echivalenţa strictă)

Axiome

$Ax_1 \cdot$ $pq \prec qp$

$Ax_2 \cdot$ $qp \prec p$

$Ax_3 \cdot$ $p \prec pp$

$Ax_4 \cdot$ $p(qr) \prec q(pr)$

$Ax_5 \cdot$ $p \prec \sim(\sim p)$

$Ax_6 \cdot$ $((p \prec q) \cdot (q \prec r)) \prec (p \prec r)$

$Ax_7 \cdot$ $\sim \Diamond p \prec \sim p$

$Ax_8 \cdot$ $(p \prec q) \prec (\sim \Diamond q \prec \sim \Diamond p)$

Semnul conjuncţiei este doar subînţeles. Conjuncţia, posibilitatea şi implicaţia pot fi definite matriceal pe mulţimea (1 2, 3, 4).

$p \cdot q$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

$\Diamond$	$\prec$	1	2	3	4
1	1	2	4	4	4
1	2	2	2	4	4
1	3	2	4	2	4
4	4	2	2	2	2

Reguli

a) Regula substituţiei

b) Regula schimbului de echivalente

c) Regula adjuncţiei. Dacă p, q sînt asertate separat atunci pq este asertată.

d) Regula detaşării. Dacă p este asertat şi $p \prec q$ este asertat atunci q este asertat.

Teoreme

1. $p \prec p$

Demonstraţie. În Ax_2 q/p: $pp \prec p$. În Ax_6 q/pp şi r/p. Se obţine: $((p \prec pp) \cdot (pp \prec p)) \prec (p \prec p)$. De aci conform

cu teorema deja demonstrată ($pp \prec p$) şi cu Ax_3 obţinem $p \prec p$.

2. $p = p$.

Demonstraţie. Prin asertare adjunctivă din teorema 1 se obţine $(p \prec p) \cdot (p \prec p)$. Apoi prin q/p în def. (10) obţinem $(p = p) = (p \prec p \cdot p \prec p)$. De aci prin detaşare $p = p$.

4. INTERPRETAREA MODALITĂŢILOR

R. Carnap a dat următoarea interpretare semantică modalităţilor:
Necesar = Logic adevărat (adevăr dedus numai cu ajutorul regulilor semantice)
Imposibil = Logic fals (respingere pe baza regulilor semantice)
Contingent = Adevăr factual (care nu se deduce conform cu regulile semantice ale sistemului)
Necesar = Ne-logic adevărat
Posibil = Ne-logic fals
Necontingent = Logic determinat (adică L — adevărat sau L — fals).

5. LOGICA MODALĂ A LUI GR. C. MOISIL

Gr. C. Moisil construieşte o logică modală în care introduce un nou functor modal „poate fără" notat cu S; Spq va însemna deci :p poate fără q. (Exemplu: „Astăzi plouă şi poate nu-mi iau umbrela"). Alte simboluri folosite de Gr. C. Moisil: η (imposibil), γ (contingent), μ (posibil), ν (necesar), N (nu), C (implică), K (şi), A (sau).
Ca variabile propoziţionale Moisil foloseşte: x, y, z,

Definiţii

1. $Sxy = KxNy$

2. Adevăr $= Cxx$

3. Fals $= Sxx$

4. $\eta x = \mathrm{C}x\mathrm{S}xx$

5. $\gamma x = \mathrm{SC}xxx$

6. $\mu x = \eta\eta x$

7. $\nu x = \gamma\gamma x$

Axiomele adoptate sînt cele nouă axiome fără negație din logica lui Hilbert și Bernays la care adaugă o axiomă de modalitate.

Ax_1 $\mathrm{C}x\mathrm{C}yx$ $[= p \to (q \to p)]$

Ax_2 $\mathrm{CC}x\mathrm{C}xy\mathrm{C}xy$ $[= (p \to (p \to q)) \to (p \to q)]$

Ax_3 $\mathrm{CC}xy\mathrm{CC}yz\mathrm{C}xz$ $[= (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))]$

Ax_4 $\mathrm{CK}xyx$ $[= (p \cdot q) \to p]$

Ax_5 $\mathrm{CK}xyy$ $[= (p \cdot q) \to q]$

Ax_6 $\mathrm{CC}zx\mathrm{CC}zy\mathrm{C}z\mathrm{K}xy$ $[= (r \to p) \to ((r \to q) \to (r \to (p \cdot q)))]$

Ax_7 $\mathrm{C}x\mathrm{A}xy$ $[= p \to (p \vee q)]$

Ax_8 $\mathrm{C}y\mathrm{A}xy$ $[= q \to (p \vee q)]$

Ax_9 $\mathrm{CC}xz\mathrm{CC}yz\mathrm{CA}xyz$ $[= (p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))]$

Ax_{10} $\mathrm{C}y\mathrm{AS}yxx$ $[= q \to ((q \dot{-} p) \vee p)]$

Ax_{11} $\dfrac{\mathrm{C}z\mathrm{A}xy}{\mathrm{CS}zyx} \left[= \dfrac{r \to (p \vee q)}{(r \dot{-} q) \to p}\right].$

Pentru cititorul mai puțin familiarizat cu scrierea lui Lukasiewicz am dat în paranteză transcrierea în limbajul de tip Peano-Russell. Se observă că ultima axiomă are forma unei reguli de deducție. (Functorul S l-am redat prin $\dot{-}$).

Reguli

I. *Regula modus ponens* : $\dfrac{\alpha \quad \mathrm{C}\alpha\beta}{\beta}$

II. *Regula substituției* : $\dfrac{\alpha}{\alpha(x_1/\theta_1, \ldots x_n/\theta_n)}$

III. *Regula adjuncției în ipoteză* :

Dacă $\dfrac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta_1, \ldots, \beta_m}$ e o schemă valabilă atunci

$$\frac{\alpha_1, \ldots \alpha_n, \ \delta_1, \ldots \delta_t}{\beta_1, \ldots \beta_m}$$ este o schemă valabilă.

IV. *Regula adjuncției concluziilor:*

Dacă $\dfrac{\alpha_1, \ldots \alpha_n}{\beta_1, \quad \beta_m}$ și $\dfrac{\alpha_1, \ldots \alpha_n}{\delta_1, \quad \delta_t}$ sînt scheme valabile,

schema $\dfrac{\alpha_1, \ldots \alpha_n}{\beta_1, \quad \beta_m, \delta_1, \ldots \delta_t}$ este valabilă.

V. *Regula silogismului:*

Dacă $\dfrac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta_1, \quad \beta_m, \delta_1, \quad \delta_t}$ și $\dfrac{\beta_1, \ldots \beta_m, \lambda_1, \ldots \lambda_n}{\omega_1 \quad \omega_w}$

atunci $\dfrac{\alpha_1, \ldots \alpha_n, \lambda_1, \ldots \lambda_n}{\omega_1, \quad \omega_w}$

(Se înțelege că dacă $\delta_1, \quad \delta_n$ sînt vide regula se reduce la cea obișnuită).

VI. *Regula substituției într-o schemă:*

Dacă expresiile $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \quad \beta_m$ conțin o variabilă propozițională x și dacă

$$\frac{\alpha_1, \ldots \alpha_n}{\beta_1, \quad \beta_m} \text{ atunci } \frac{\alpha_1^*, \ldots \alpha_n^*}{\beta_n^*, \quad \beta_m^*}$$

(unde * marchează expresiile provenite din x/θ).

VII. *Regula aserțiunii:*

Dacă α este o teză și $\dfrac{\alpha}{\beta}$ este o schemă valabilă atunci β este o teză.

Teze. Gr. C. Moisil dă mai întîi lista tezelor demonstrabile din axiomele pozitive. (Exemplificăm).

1. $Cxx \cdot [= p \to p]$

Demonstrație. $CxCxx(Ax_1,\ y/x)$

$$\frac{CCxCxxCxx\ (Ax_2,\ y/x)}{Cxx} \quad \text{(reg. I)}$$

2. $CxCCxyy\,[= p \to ((p \to q) \to q)]$

3. $CCyzCCxyCxz\ [=(p \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))]$

Teze cu operatorul de modalitate

4. $CSxyx\ [= (p \dot{-} q) \to p]$

$$\cfrac{\cfrac{CxAxy}{CSxyx} \ (Ax_{11},\ z/x)}{CSxyx} \quad (Ax_7 \text{ și, reg. I})$$

5. $CSyySxx$

$$\cfrac{\cfrac{CyAxy}{CSyxy} \ (Ax_{11},\ z/y)}{CSyxy} \quad (Ax_8,\ \text{reg. I})$$

La logica modală generală se adaugă contingența (γ) și imposibilitatea (η).

$$\left.\begin{array}{l} C\eta xCxSxx \\ CCxSxx\eta x \end{array}\right\} \text{def. imposibilității}$$

$$\left.\begin{array}{l} C\gamma xSCxxx \\ CSCxxx\gamma x \end{array}\right\} \text{def. contingenței}$$

Pe baza operatorilor γ și η se introduce apoi μ (posibilitatea și ν (necesitatea)

$$\mu = \eta\eta$$

$$\nu = \gamma\gamma$$

Teze importante legate de introducerea noilor modalități.

6. $C\eta x\gamma x$ (imposibilitatea contingenței se deduce din contingența ei)

7. ηSxx (falsul este imposibil)

8. $\eta Kx\eta x$

9. $CKx\eta xy$

10. $C\eta Cttx$ (imposibilitatea adevărului este falsul)

11. $A\gamma xx$ (principiul modal al terțului exclus)

12. $CCxyC\eta y\eta x$

13. $\dfrac{Cxy}{C\gamma y\gamma x}$

(12 și 13 sînt principii de contrapoziție)

La axiomele de mai sus Gr. C. Moisil adaugă noi axiome pentru η și γ.

Ax_{12} $C\eta xCxSxx$

Ax_{13} $CCxSxx\eta x$

Ax_{14} $C\gamma xSCxxx$

Ax_{15} $CSCxxx\gamma x$

Se adaugă apoi axiomele pentru μ, ν:

Ax_{16} $C\mu x\eta\eta x$

Ax_{17} $C\eta\eta x\mu x$

Ax_{18} $C\nu x\gamma\gamma x$

Ax_{19} $C\gamma\gamma x\nu x$

Logica intuiționistă este un caz particular al logicii modale generale (Ax_1 — Ax_{11}).

Dacă la logica modală generală se adaugă două axiome de distributivitate obținem logica modală specială.

Ax_{20} $CCKxyzACxzCyz$

Ax_{21} $CKSzxSzySxAxy$

Există mai multe posibilități de a transforma logica modală în logică bivalentă. De exemplu, prin adăugarea axiomei $A x \eta x$ (există și altele).
Dacă la logica modală specială se adaugă axioma de mai jos (23) se obține logica trivalentă a lui Lukasiewicz.

Ax_{22} $CKC\nu x\nu yC\mu x\mu yCxy$ (principiul de determinare)

Se enunță astfel: 'dacă din necesitatea lui x se deduce necesitatea lui y și din posibilitatea lui x se deduce posibilitatea lui y atunci x se deduce din y.
Dacă la axiomele 1—22 se adaugă:

Ax_{23} $CNxA\eta xKx\gamma x$

Ax_{24} $CA\eta xKx\gamma xNx$

se obține logica trivalentă cu negația (N)
Axiomele:

Ax_{25} $CC_{L}xyACxyCNyNx$

Ax_{26} $CACxyCNyNxC_{L}xy$

introduc implicația lui Lukasiewicz (C_L).
Slupecki dezvoltă logica lui Lukasiewicz prin functorul T (introdus cu axiomele 27, 28).

Ax_{27} $C_{L}TxNTx$

Ax_{28} $C_{L}NTxTx$

Dacă la Ax_1 — Ax_{17} adăugăm:

$$Ax_{29} \quad \frac{Cxy}{CNyNx}$$

Ax_{30} $CxNNx$

Ax_{31} $CNNxx$

obținem logica modală simetrică generală. Noi axiome vor duce la logica modală simetrică normală. Din cele de mai sus cititorul își poate forma o imagine axiomatică asupra sistemelor n-valent modale. Sinteza realizată de Gr. C. Moisil este una din cele mai originale din tot ce s-a scris în logica contemporană.

6. LOGICA DEONTICĂ

O serie de legi ale logicii formale, pot fi aplicate la sistematizarea normelor, respectiv a modalităţilor normative („deontice") cum sînt „este permis *x*", „este obligatoriu *y*" etc. Această problemă a fost cercetată mai îndeaproape de Georg H. von Wright, Anderson, R. Feys, G. Frey, O Becker ş.a.*. Adesea se folosesc în legătură cu normele termenii de „logică normativă", „logică deontică", „logica obligaţiei", „logica imperativă", fiecare subliniind un aspect sau altul al studierii logice a normelor. Nu vom insista asupra acestor diferenţe şi vom considera termenul de „logică deontică" drept un termen generic ce se referă la orice studiu logic al propoziţiilor normative (cu sau fără modalitate). Există, aşa cum a arătat von Wright, o corespondenţă între modalităţile deontice şi celelalte, corespondenţă pusă în evidenţă de tabelul de mai jos.

Aletice	Existenţiale	Epistemice	Deontice
Necesar	Universal	Verificat	Obligatoriu
Posibil	Existent	Nefalsificat	Permis
Contingent	Parţial	Nedecis	Indiferent
Imposibil	Vid	Falsificat	Interzis

Modurile aletice sînt predicate care intră în forma propoziţiei („Este necesar *p*"), modurile existenţiale sînt proprietăţile claselor de obiecte („clasa profesorilor bogaţi este vidă"), modurile epistemice intră în componenţa aserţiunilor despre propoziţie („propoziţia *p* este verificată"), iar cele deontice se referă la diferite *acte* (umane) („actul *x* este permis"). Între diferite modalităţi se poate stabili o corespondenţă în aşa fel că ele satisfac scheme comune, de exemplu, schema „*a* nu este nici *b* nici *c*" este satisfăcută de corespondenţele din tabelul următor:

Contingent	Necesar	Imposibil
Parţial	Universal	Vid
Nedecis	Verificat	Fals
Indiferent	Obligatoriu	Interzis
a	b	c

* Se expune după Georg Henryk von Wright [40], A. Ross Anderson [40] şi G. Frey [39].

(Ex. „Contingent nu este nici necesar, nici imposibil”). Ca şi în logica propoziţiilor se introduce un simbolism adecvat.
1. A, B, C, ... acte în general (ex. „hoţie”, „ucidere”). Orice act are două valori „realizat” sau „nerealizat” (von Wright ia valorile în sens absolut). Unele acte sînt „atomare”, altele sînt „moleculare”, adică funcţii de altele. Funcţiile de acte se numesc „funcţii deontice”. Vom avea funcţiile.
2. Dacă A, B, C, sînt acte atunci ∼ A (negaţie), A & B (conjuncţia), A ∨ B (disjuncţia), A → B (implicaţia), A ↔ B (echivalenţa) sînt acte moleculare (sau funcţii de acte).

Un act este funcţie de alt act în sensul că valoarea sa de realizare depinde de realizarea sau nerealizarea altor acte. (Realizarea se referă, evident, la un *agent* oarecare). Valorile de realizare pot fi notate cu 1 (realizat) şi o (nerealizat). Definiţia funcţiilor de acte se dă după cum urmează:
a) ∼ A este realizat dacă şi numai dacă nu este realizat A.
b) A & B este realizat dacă şi numai dacă ambele acte A, B sînt realizate.
c) A ∨ B este realizat dacă cel puţin unul din două A, B, este realizat.
d) A → B înseamnă că nu se poate ca actul A să fie realizat şi actul B să nu fie realizat.
e) A ↔ B: ambele acte sînt realizate sau ambele nerealizate. (Se poate vorbi de asemenea de *compatibilitatea* sau *incompatibilitatea* a două acte).

Despre un act se poate spune că este *permis*, *obligatoriu*, *interzis* sau *indiferent.*

Aceşti termeni modali pot fi interpretaţi în general („absolut”) sau relativ la un cod de norme dat. De asemenea, modalităţile deontice pot fi corelate cu alte tipuri de modalităţi (de ex. un act este „obligatoriu prin lege” sau „obligatoriu fiindcă altfel nu este *posibil*”). Ca şi în cazul altor modalităţi cele deontice pot fi definite unele prin altele. Fie operatorii deontici notaţi după cum urmează: P (permisie), O (obligaţie), F (interzis), I (indiferent). Dacă vom lua ca nedefinită permisia (P) vom obţine definiţiile:

1. OA = ∼ P ∼ A („ nu este permis non-A”)

2. FA = ∼ PA

3. IA = (PA) & (P ∼ A)

La acestea se poate adăuga compatibilitatea de A, B și incompatibilitatea de A, B:

4. Comp (A, B) = P(A & B)

5. Incomp (A, B) = ~ P(A & B).

Propoziția că realizarea actului A ne obligă la realizarea actului B se scrie OA → B.

Între expresiile deontice pot fi stabilite legături de implicație sau de echivalență, ceea ce permite „calculul deontic".

De exemplu:

$$OA \rightarrow B = \sim (P \sim (A \rightarrow B)) = \sim (PA \,\&\, \sim B)$$

(Observație: PA & ~ B este un mod prescurtat de a scrie P(A & ~ B), analog OA → B este o prescurtare pentru O(A → B)).

Expresia (A & B) V (A & ~ B) este o formă normală disjunctivă pentru A.

Decizia. Scopul studiului logic al normelor:

a) a decide dacă o schemă deontică este general realizabilă sau nu,

b) a decide dacă un sistem de norme este sau nu consistent (= necontradictoriu).

Definiții

(6) Un act este *tautologic* dacă el este realizat ori de cîte ori este dată valoarea de realizare (1 sau 0) a *n* acte date.

(7) Un act este *contradictoriu* dacă el este nerealizat ori de cîte ori este dată valoarea de realizare (1, 0) a *n* acte date.

Principii de decizie. G. W. von Wright a formulat o serie de principii de decizie. Este important de observat că decizia se face asupra unor propoziții adevărate sau false. Corelația poate fi stabilită în felul următor. Dacă un act A este realizat atunci propoziția care spune că „A este realizat" este adevărată, iar dacă A nu este realizat atunci propoziția care spune că „A este realizat" este falsă. Analog pentru modalitățile: dacă actul A este permis, propoziția care spune „PA" va fi adevărată, dacă actul A nu este permis propoziția „PA" va fi falsă.

În vederea deciziei von Wright formulează următoarele principii.

I. *Principiul distribuției deontice.* Dacă A V B atunci P(A V B) este echivalentă cu (PA) V (PB). Conform cu valorile de realizare vom avea distribuțiile PA & ~ B, P ~ A & B și P ~ ~ A & ~ B

II. *Principiul permisiunii.* Pentru orice act A are loc PA sau P(~ A).

III. *Principiul contingenței deontice.* Un act tautologic nu este necesar obligatoriu și un act contradictoriu nu este necesar interzis.

Decizia depinde numai de principiul „distribuției deontice" (I) și de logica propozițiilor. Exemple de expresii asupra cărora urmează să se decidă.

(a_1) ((PB) → (PA)) → (~(PA) → ~ (PB))

(a_2) ((OA) & (OA → B)) → (OB).

Iată cum se calculează valoarea celei de a doua expresii (a_2). Se pornește de la distribuția deontică: PA & ~ B sau P ~ ~ A & B sau P ~ A & ~ B. În dependență de această distribuție și de matricele funcțiilor de adevăr se calculează valoarea expresiei.

PA&~B	P~A&B	P~A&~~B	OA	OA → B	(OA) & &(OA→B)	OB	(a_2)
v	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*	*v*
v	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*v*
v	*f*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*	*v*
v	*f*	*f*	*v*	*f*	*f*	*f*	*v*
f	*v*	*v*	*f*	*v*	*f*	*f*	*v*
f	*v*	*f*	*f*	*v*	*f*	*v*	*v*
f	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*f*	*v*
f	*f*	*f*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*

distribuția deontică — decizia asupra expresiei (a_2).

Legi deontice

1. (PA) ↔ ~ (O ~ A)
2. (OA) ~ (PA)
3. OA & B ↔ (OA) & (OB)
4. PA V B ↔ PA V PB
5. ((OA) V (OB)) → OAVB
6. (PA & B) → (PA) & (PB)

Urmează şase legi de derivare

7. ((OA) & (OA → B)) → OB
8. ((PA) & (OA → B)) →PB
9. (~(PB)&(OA→B))→ ~(PA)
10. ((OA → BVC) & ~ (PB) & & ~ (PC)) → ~(PA).
11. ~ ((OA V B) & ~ (PA) & ~ (PB))
12. ((OA) & (OA & B → C)) → OB → C
13. O ~ A → A

Logica deontică studiază de asemenea noţiunile de „sancţiune" sau „penalizare". A. Ross Anderson a propus un sistem care are la bază modurile aletice şi operatorul S (referire la „sancţiune"). De exemplu, luînd operatorul M (posibil) şi S vom putea defini celelalte moduri astfel (numerotăm în continuarea definiţiilor date anterior).

(8) $O'p = (Mp \;\&\; M \sim p) \;\&\; \sim M (\sim p \;\&\; \sim S)$

(9) $F'p = (Mp \;\&\; M \sim p) \;\&\; \sim M \;(p \;\&\; \sim S)$

(10) $I'p = M\,(p \;\&\; \sim S) \;\&\; M\,(\sim p \;\&\; \sim S)$

Aci *p* desemnează o propoziţie oarecare, iar O', F', I' sînt modurile aletice corespunzătoare (redefinite).
Definiţia (8) arată că o propoziţie este *obligaţie* dacă şi numai dacă se admite că „*p* este posibil şi non-*p* este posibil dar (în acelaşi timp) nu este posibil non-*p* împreună cu negaţia sancţionării". Accasta este „clauza obligaţiei".

Fie, de exemplu, propoziţia „Este obligatoriu ca x_1 să plătească taxa radio". Aceasta va însemna conform cu definiţia (8) că „este posibil ca x_1 să plătească taxa radio şi este posibil ca x_1 să nu plătească taxa radio, dar nu este posibil ca (x_1 să nu plătească taxa radio şi în acelaşi timp să nu fie sancţionat)". Definiţia (9) este „clauza interdicţiei". Ea poate fi exemplificată astfel. Că „Este interzis ca x_1 să treacă (strada) pe roşu" aceasta înseamnă: „Este posibil ca x_1 să treacă pe roşu şi este posibil ca x_1 să nu treacă pe roşu, dar nu este posibil ca (x_1 să treacă pe roşu şi să nu fie sancţionat)". Definiţia (10) este „clauza indiferenţei".

IX

SILOGISTICA

Lukasiewicz a construit în mod pur formal silogistica aristotelică (independent de calculul predicatelor sau al claselor). Vom considera simbolurile: *a*, *b*, *c*, termeni generali nevizi.

A, E, I, O constante logice (cu semnificațiile date anterior). (Variabilele *a*, *b*, *c*, . . . pot fi cuantificate cu ajutorul cuantorilor: Π (universal) și Σ (existențial), de exemplu Π*a*A*ab* : „pentru orice *a* este adevărat că toți *a* sînt *b*").

A*ab*, E*ab*, I*ab*, O*ab* (desemnează respectivele judecăți). De exemplu, A*ab* se citește „toți *a* sînt *b*".

La axiomele logicii propozițiilor:

Ax_1 CC*pq*CC*qr*C*pr*

Ax_2 CCN*ppp*

Ax_3 C*p*CN*pq*

se adaugă axiomele silogisticii:

Ax_4 A*aa*

Ax_5 I*aa*

Ax_6 CKA*bc*A*ab*A*ac* (*Barbara*)

Ax_7 CKA*bc*I*ba*I*ac* (*Datisi*)

Definiții:

(1) E*ab* ≡ NI*ab*

(2) O*ab* ≡ NA*ab*

Reguli :

I. *Regula substituției* pentru variabile propoziționale și termeni (*a*, *b*, *c*, ...) Variabilele propoziționale se pot înlocui cu expresii, iar termenii cu alți termeni.

II. *Regula modus ponens.*
Toate propozițiile silogisticii aristotelice pot fi deduse din Ax_1 — Ax_7 cu ajutorul regulilor. (Există un număr destul de mic de teoreme ale logicii propozițiilor care intervin în deducție și anume, 14 teoreme).
Tezele logicii propozițiilor utile în vederea deducerii vor fi:

1. C*p*C*qp*
2. CC*qr*CC*pq*C*pr*
3. CC*p*C*qr*C*q*C*pr*
4. C*p*CN*pq*
5. CCN*ppp*
6. CC*pq*CN*q*N*p*
7. CCK*pqr*C*p*C*qr*
8. C*p*CCK*pr*C*qr*
9. CC*sp*CCK*pqr*CK*sqr*
10. CCK*pqr*CC*sq*CK*psr*
11. CC*rs*CCK*pqr*CK*qps*
12. CCK*pqr*CK*p*N*r*N*q*
13. CCK*pqr*CKN*rq*N*p*
14. CCK*p*N*q*N*r*CK*prq*

Teze de demonstrat.

15. CA*bc*CI*ba*I*ac*

(dacă toți *b* sînt *c* atunci din unii *b* sînt *a* se deduce unii *a* sînt *c*).

Demonstrație. În teza logicii propozițiilor

CCK*pqr*C*p*C*qr* (legea exportației)

se substituie *p*/A*bc* *q*/I*ba*, *r*/I*ac* și se obține

CCKA*bc*I*ba*I*ac*CA*bc*CI*ba*I*ac*

La aceasta și Ax_7 se aplică reg. II și se obține 15.

16. CI*ab*I*ba* (conversiunea lui I).

În teorema 15 se aplică *b*/*a*, *c*/*a*, *a*/*b* și se obține:

CA*aa*CI*ab*I*ba*

Prin regula II şi Ax_4 obţinem 16.

17. CI*ba*CA*bc*I*ac*

În teorema CC*p*C*qr*C*q*C*pr* substituim: *p*/A*bc*, *q*/I*ba*, *r*/I*ac*:

CCA*bc*CI*ba*I*ac*CI*ba*CA*bc*I*ac*.

La aceasta şi 15 se aplică reg. II.

18. CA*ab*I*ab* (subalternarea) În 17: *b*/*a* *c*/*b* şi reg. II (la aceasta şi Ax_5).

În continuare vom adopta sistemul mai economic de notare a demonstraţiilor.

19. CC*p*I*ab*C*p*I*ba* (2. q/I*ab*, *r*/I*ba* × C_{16} — 19).

Demonstraţia a fost notată pe scurt: adică la teza doi se operează substituţiile *q*/I*ab*, *r*/I*ba*, iar la rezultat şi teza 16 se aplică regula implicaţiei (C), adică modus ponens.

20. CA*ab*I*ba* 19. *p*/A*ab* × C_{18} — 20).

21. CI*ba*I*ab* (16. *a*/*b*, *b*/*a* — 21)

22. CNI*ab*NI*ba* (6. *p*/I*ba*, *q*/I*ab* × C_{11} — 22)

23. CE*ab*E*ba* (22. Def. (1)).

24. CNI*ab*NA*a*B (6. *p*/A*ab*, *q*/I*ab* × C — 24).

25. CE*ab*O*ab* (14. Def. (1), def (2) — 25).

Urmează modurile afirmative:

26. CC*s*I*ba*CKA*bcs*I*ac* (10. *p*/A*bc*, *q*/I*ba*, r/I*ac* × CAx_7 — 26)

27. CKA*bc*I*ab*I*ac* (*Darii*) (26 s/I*ab* × C_{16} — 27)

28. CKA*bc*A*ab*I*ac* (*Barbari*) (26 *s*/A*ab* × C_{20} — 28)

29. CA*ba*I*ba* (18. *a*/*b*, *b*/*a* — 29)

30. CKA*bc*A*ba*I*ac* (*Darapti*) (26. *s*/A*ba* × C_{29} — 30)

31. CCK*pq*I*ba*CK*qp*I*ab* (11. *r*/I*ba*, *s*/I*ab* × C_{21} — 31)

32. CKA*ba*I*ba*I*bc*I*ca* (Ax_7, *c*/*a*, *a*/*c* — 32)

33. CKI*bc*A*ba*I*ac* (*Disamis*) (31. p/A*ba*, /*q*I*bc*, *b*/*c* × C_{32} — 33)

34. CKA*ba*I*cb*I*ca* (27. *c*/*a*, *a*/*c* — 34)

35. CKI*cb*A*ba*I*ac* (*Dimaris*) (31. *p*/A*ba*, *a*/I*cb*, *b*/*c* × C_{34} — 35)

36. CKA*ba*A*cb*I*ca* (28. *c*/*a*, *a*/*c* — 36).

37. CKA*cb*A*ba*I*ac* (*Bramantip*).

Modurile negative:

38. CKNI*ac*A*ba*NI*bc* (13. *p*/I*bc*, *q*/A*ba*, *r*/Iac × C_{33} — 38)

39. CKE*ac*A*ba*A*bc* (38. Def. (1) — 39).

40. CKE*bc*A*ab*E*ac* (*Celarent*) (39. *a*/*b*, *b*/*a* — 40)

41. CCKE*baqr*CKE*abqr* (9. *s*/E*ab*, *p*/E*ba* × C_{23} — 41)

42. CKE*cb*A*ab*E*ac* (*Cesare*) (41. *a*/*c*, *q*/A*ab*, *r*/E*ac* × C_{40}—42)

43. CCK*pq*E*ab*CK*qp*E*ba* (9. *r*/E*ab*, *s*/E*ba* × C_{23} — 43)

44. CKE*ab*A*cb*E*ca* (42. *c*/*a*, *a*/*c* — 44)

45. CKA*cb*E*a*E*ac* (*Camestres*) (43. *p*/E*ab*, *q*/A*cb*, *a*/*c*, *b*/*a* ×
× C_{44} — 45)

46. CKE*ba*A*cb*E*ca* (40. *c*/*a*, *a*/*c* — 46).

47. CKAcbEbaEac (*Camestres*) (43. *p*/E*ba*, *q*/A*cb*, *a*/*c*, *b*/*a*, ×
× C_{46} — 47)

48. CC*p*E*ac*C*p*O*ab* (2. *q*/E*ab*, *r*/O*ab* × C_{25} — 48)

49. CKE*bc*A*ab*O*ac* (*Celaront*) (48. *p*/KE*bc*A*ab*, *b*/*c* × C_{40} — 49)

50. CKE*cb*A*ab*O*ac* (*Cesaro*) (48. *p*/KE*cb*A*ab*, *b*/*c* × C_{42}—50)

51. CKA*cb*E*ab*O*ac* (*Camestrop*) (48. *p*/KA*cb*E*ab*, *b*/*c* × C_{45} — 51)

52. CKA*cb*E*ba*O*ac* (*Camenop*) (48. *p*/KA*cb*E*ba*, *b*/*c* × C_{47} —52)

53. CKNI*ac*I*ba*NA*bc* (13. *p*/A*bc*, *q*/I*ba*, *r*/I*ac* × C_7 — 53)

54. CKE*ac*I*ba*O*bc* (53. Def (1), Def. (2) — 54)

55. CKE*bc*I*ab*O*ac* (*Ferio*) (54. *a*/*b*, *b*/*a* — 55)

56. CKE*cb*I*ab*O*ac* (*Festino*) (41. *a*/*c*, *q*/I*ab*, *r*/O*ac* × C_{55} — 56)

57. CC*s*I*ab*CKE*bcs*O*ac* (10. p/E*bc*, *q*/I*ab*, *r*/O*ac* × C_{55}—57)

58. CKE*bc*I*ba*O*ac* (*Ferison*) (57. *s*/I*ba* × C_{11} — 58)

59. CKE*cb*I*ba*O*ac* (*Fresison*) (1. *a*/*c*, q/I*ba*, *r*/O*ac*, X C_{58}—59)

60. CA*ba*I*ab* (20. *a*/*b*, *b*/*a* — 60)

61. CKE*bc*A*ba*O*ac* (*Felapton*) (57. *s*/A*ba* — C_{60} — 61)

62. CKE*cb*A*ba*O*ac* (*Fesapo*) (41. a/c, q/Aba, r/O*ac* × C_{61} —62)

63. CKA*bc*N*ac*N*ab* (12. *p*/A*bc*, *q*/A*ab*, *r*/A*ac* × C_{Ax_3} — 63)

64. CKA*bc*O*ac*O*ab* (61. Def (2) — 64)

65. CKA*cb*O*ab*O*ac* (*Baroco*) (64. *b*/*c*, *c*/*b* — 65)

66. CKNA*ac*A*ab*NA*bc* (13. *p*/A*bc*, *q*/A*ab*, *r*/A*ac* × C_{Ax_3} — 66)

67. CKO*ac*A*ab*O*bc* (66. Def. (2) — 67)

68. CKO*bc*A*ba*O*ac* (*Bocardo*) (67. *a*/*b*, *b*/*a* — 68)

Formele necorecte de silogism sînt eliminate cu ajutorul a două reguli de eliminare.
Toate formele care se obțin din „axiome de eliminare"

*Ax_8 CKA*cb*A*ab*I*ac*

*Ax_9 CKE*cb*E*ab*I*ac*

pot fi eliminate cu ajutorul regulilor:
III. regula eliminării prin detașare: dacă are loc dacă α atunci β și β nu are loc atunci α este eliminat.
IV. regula eliminării prin substituție: dacă β este substituit în locul lui α și β este eliminat atunci α este de asemenea eliminat.
Exemple (Formulele eliminate vor fi notate cu *)

*69(Ax_8)

*69a(Ax_9)

70. CI*ac*CKA*cb*A*ab*I*ac* (1. *p*/I*ac*, *q*/KA*cb*A*ab* — 70)

*71 I*ac* (70 × C*71 — *59) (Antecedentul *71 al implicației

70 este eliminat deoarece consecventul *69 este eliminat).

72. CCN*Iac*I*ac*I*ac* (5. *p*/I*ac* — 72)

73. CCE*ac*I*ac*I*ac* (72. Def. (1) — 73)

*74 CE*ac*I*ac* (73 × C*74 — *71)

Lukasiewicz remarcă faptul că nu este dovedită completitudinea sistemului în genere deşi el este complet în raport cu silogismele lui Aristotel.

ANEXĂ

1. În legătură cu calculul propozițiilor noi am formulat două metateoreme.

I. Există 2^{2^n} funcții de n variabile (cunoscut). Dacă ordonăm aceste funcții de la 0 la $2^{2^n} - 1$ (f_0, f_1, $f_{2^{2^n}-1}$) atunci există o astfel de alegere de indici încît fiecare indice să reprezinte traducerea în sistemul zecimal de numerație a seriei de valori ale funcției considerată ca expresie numerică în sistemul binar. (Prin aceasta se presupune că folosim pentru adevăr și fals, respectiv cifrele 1,0). Fie n = 2. Vom avea : f_0, f_{15}, unde f_0 va reprezenta seria (0000) iar f_{15} seria (1111) adică f_0 va fi contradicția, iar f_{15} va fi tautologia. Conjuncția va fi f_1 (0001).

(„Acta logica", 7/8, 1964/65).

II. Toate teoremele construite numai cu operatorul echivalenței sînt deductibile cu ajutorul comutativității și asociativității prin substituție în principiul identității ($p \equiv p$). În acest fel ansamblul teoremelor de echivalență (fără alți operatori) formează o logică a identității.

(„Analele Universității Filozofie", 1968)

2. **Diagramele Venn.** Venn a propus următoarele diagrame pentru reprezentarea judecăților A, E, I, O și silogismelor

corespunzătoare (A, B, C clase, $\bar{A}$, B, $\bar{C}$, clase complementare).

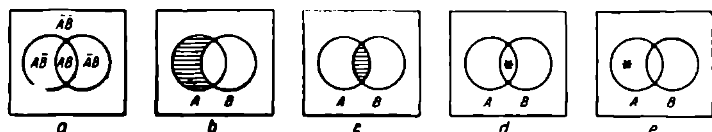


Fig. 16

Fig. *a* arată că universul este împărțit în patru clase de intersecții (AB, A$\bar{B}$, $\bar{A}$B, $\bar{A}\bar{B}$); fig. *b*. judecata „Toți A sînt B" interpretată de Venn: „Nu exista A în afara lui B" (ceea ce nu există este hașurat) și scrisă A$\bar{B}$ $= 0$; fig. *c*. judecata „Nici un A nu este B", scrisă AB $= 0$; fig. *d*. judecata „Unii A sînt B" (se presupune că nu este exclus să fie și în afara părții însemnate cu *) notată cu AB $\neq 0$; iar fig. *e*. judecata „Unii A nu sînt B" (se presupune că unii pot fi) notată prin A$\bar{B}$ $\neq 0$.

Toți B sînt C	Nici un B nu e C	Nici un B nu e C
Toți A sînt B	Toți A sînt B	Unii A sînt B
Toți A sînt C	Nici un A nu e C	Unii A nu sînt C

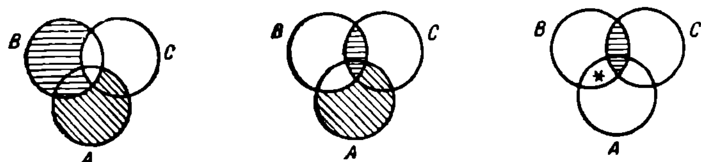


Fig. 17

3. **Operatorul** — ε (epsilon). Hilbert introduce un operator analog cu iota-operator (ιx) însă mai general. Expresia ε (A) sau, altfel scris εxA(x), înseamnă lucrul pentru care expresia A(a) are loc dacă A(a) se realizează în genere pentru vreun obiect. Acest operator se introduce cu axioma:

(1) $A(a) \rightarrow A(\varepsilon(A))$

Din ea se *deduc* $\forall x A(x) \rightarrow A(a)$ („axioma lui Aristotel”), $\overline{\forall x A(x)} \rightarrow \exists x \overline{A(x)}$ și $\overline{\exists x A(x)} \rightarrow \forall x \overline{A(x)}$. Prin acest operator se definesc cuantorii.

(2) $\forall x A(x) \equiv A(\varepsilon(\bar{A}))$

(3) $\exists x A(x) \equiv A(\varepsilon(\bar{A}))$

Dacă un enunț A se realizează pentru un singur lucru *a* atunci putem scrie $a \equiv \varepsilon\,(A)$.

Dacă A se realizează pentru un mare număr de lucruri atunci ε joacă rol de funcție de selecție și ε(A) reprezintă pe un oarecare *a* (din această mulțime) pentru care A se realizează.

4. **Logica combinatorică.** Logica combinatorică studiază operațiile cu simboluri (fără a apela la substituție) din punct de vedere pur material. Ea stabilește pentru aceste operații o serie de operatori numiți „combinatori”.

Fie obiectele formale (semne grafice, de exemplu) notate cu *a*, *b*, *c*,

Vom avea combinatorii: *compozitorul elementar* (B), *permutatorul* (C), *repetitorul* (W), *eliminatorul* (K), *identificatorul* (I), adică corespunzător operațiilor cu simboluri: a compune (= a juxtapune), a schimba locul (permuta), a repeta, a elimina și a identifica.

Definiții :

1. $Ia = a$
2. $Babc = a(bc)$
3. $Cabc = acb$
4. $Wab = abb$
5. $Kab = a$

Bazele logicii combinatorie au fost puse de M. Schönfinkel (1924) și de H. B. Curry și R. Feys au axiomatizat sistemul logicii combinatorie.

5. Exerciţii de analiză logică

a) Să se arate că textul următor este demonstrativ. „$x < 2$ sau $x = 2$. Dacă $x < 2$ atunci $x + y = 2$. Dacă $x + y = 2$ atunci $y < 2$. Dacă $x > 2$ atunci $y < 2$. Or $x \neq 2$. Prin urmare, $y < 2$".

Un text este demonstrativ dacă formalizîndu-l structura lui este o lege logică. Procedăm astfel. Simbolizăm propoziţiile elementare şi pe cele compuse. $p_1 = x < 2$; $p_2 = (x = 2)$; $p_3 = x + y = 2$, $p_4 = y < 2$; $p_5 = x > 2$. Textul demonstrativ va fi reprezentat pe scurt astfel $(p_1 \vee p_2, p_1 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow p_4, p_5 \rightarrow p_4, \bar{p}_2) \vdash p_4$.

Dacă $A_1, A_2, \quad , A_n \vdash B$ atunci $(A_1, A_2 \ldots . A_n) \rightarrow B$. Deci: $((p_1 \vee p_2) \cdot (p_1 \rightarrow p_3) \cdot (p_2 \rightarrow p_4) \cdot (p_5 \rightarrow p_4) \cdot (\bar{p}_2) \rightarrow p_4$.

Aducem la f.n.c. această formulă. Dacă ea va reprezenta o lege logică atunci textul va fi demonstrativ (adică p_4 se va deduce din premisele date). Răspunsul este că avem o lege logică şi deci p_4 se deduce din premise.

b) Să se simbolizeze propoziţiile:

„Prin două puncte diferite trece cel mult o dreaptă"

„Două drepte diferite au cel mult un punct comun".

Se poate proceda în două feluri: sau considerăm variabile cu domeniu limitat sau considerăm „punctul" şi „dreapta" ca predicate de indivizi în genere.

Pentru primul caz vom nota cu $x, y, z, \ldots$ punctele, iar dreptele cu $a, b, c,$

Predicatul „x se află pe (dreapta) a" se va reprezenta prin $P(x, a)$, iar predicatul „--- diferit " se va reprezenta prin $\not\equiv$. Propoziţiile vor fi reprezentate respectiv:

(a) $\forall x \forall y (x \not\equiv y \rightarrow \overline{\exists a \exists b} \; (a \not\equiv b \cdot P(x,a) \cdot P(y, a) \cdot \; (P(x, b) \cdot$
$\cdot P(y, b))$

(b) $\forall a \; \forall b (a \not\equiv b \rightarrow \overline{\exists x \exists y} (x \not\equiv y) \cdot P(x, a) \cdot P(y, a) \cdot P(x, b) \cdot$
$\cdot P(y, b))$.

Aci ideea de „cel mult un” a fost transcrisă prin „nu există două diferite”. Ea mai poate fi redată și prin „presupunînd două ele se reduc la una”, ceea ce corespunde cu formulările:

(c) $\forall x \forall y(x \not\equiv y \rightarrow \forall a \forall b((P(x, a) \cdot P(y, a) \cdot P(x, b) \cdot P(y, b)) \rightarrow$
$\rightarrow a \equiv b))$

(d) $\forall a \forall b(a \not\equiv b \rightarrow \forall x \forall y((P(x, a) \cdot P(y, a) \cdot P(x, b) \cdot P(y, b) \rightarrow$
$\rightarrow x \equiv y))$.

Prin transformări logice se poate ajunge de la (a) la (c) și de la (b) la (d) și invers. A se observa caracterul dual al perechilor (a, b) și respectiv (c, d).

c) *Concepte economice analizate logic.* Simboluri: m, n... mărfuri; m_0, m_1, ..., m_n (mărfuri concrete); Echi (m, n) — echivalența mărfurilor; $V(m)$ — valoarea mărfii, $B(m)$ — marfa-ban; $S(x, y, m, n)$ — relația de schimb; $E(m)$ — echivalent-general; t — o mărime asociată mărfii astfel t_m, t_n. . . .

(a) Echi $(m, n) = (t_m = t_n)$

(b) $\prod_{i=0}^{n}$ Echi (m_0, m_i) („clasa de echivalente”)

(c) $V(m_0) = \exists m_i(\prod_{i=0}^{n}$ Echi (m_0, m_i) (valoarea)

(d) $V(m) = \exists x \exists y \exists n$ (Echi $(m, n) \cdot S(x, y, m, n))$ (valoarea de schimb)

(e) $E(m) = \exists x \exists y(\exists n$ Echi $(m, n) \cdot \forall m S(x, y, m, n))$

(f) $B(m) = \exists x \exists y \forall n\ S(x, y, m, n)$

Vom nota prin p o nouă mărime asociată mărfii astfel: p_m, p_n, iar prin $\simeq$ echivalent sau aproximativ echivalent.

(9) $(\forall m \forall n \exists x \exists y \exists p\ (B(p) \cdot S(x, y, m, p) \cdot S(x, y, n, p)) \rightarrow$
$\rightarrow (p_m = p_n)$

(10) $p_m = p_n \rightarrow m \simeq n$

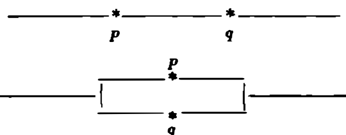
6. Aplicații ale algebrei logice

1. p, q, r, contacte; 1 — închis; o — deschis

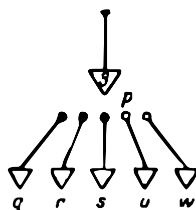
$\bar{p}$ — poziția opusă lui p

$p \cdot q$ — contacte în serie

$p \vee q$ — contacte în paralel

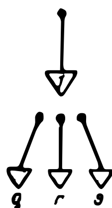


2. *Neuroni*



Neuronul p va lucra numai dacă sînt „excitați" neuronii q, r, s.

Formula: $p(t) = q(t-1) \cdot r(t-1) \cdot s(t-1) \cdot u(t-1) \cdot w(t-1)$ (Starea neuronului p în momentul t depinde de conjuncția stărilor neuronilor q, r, s, u, w în momentul $(t-1)$.



Neuronul p va lucra atunci cînd cel puțin unul dintre neuronii q, v, s este excitat.

Formula corespunzătoare:

$p(t) = q(t-1) \vee r(t-1) \vee s(t-1)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Asser G. *Einführung in die Mathematische Logik*, Leipzig. 1959.
2. Berkeley E. C., *Symbolic logic and Intelligent Machines* (am folosit traducerea rusă, Moscova 1961).
3. Bochenski, I. M., *Formale Logik*, Verlag Alber Freiburg/München, 1956.
4. Bochenski, I. M., *Grundriss der Logistik* (Aus dem Französischen übersetzt, neubearbaitet and erweitert von A. Menne), 1954.
5. Bocivar, D. A., *Ob odnom trëhznacinom iscislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klasiceskogo rasşirenogo funcţionalnogo iscislenia*, Matem. sb. 4/46.
6. Carnap R., *Einführung in die Symbolische Logik*, Wien, 1960.
7. Church A., *Introduction to mathematical logic*, Princeton, 1953.
8. Curry, H. B., *Foundations of Mathematical Logic*, New York * San Francisco*, Toronto*, London 1963.
9. Dumitriu Anton, *Logica polivalentă*, Bucureşti, 1943.
10. Enescu Gh., *Introducere în logica matematică*, Bucureşti, 1965.
11. Enescu Gh., *Logică şi adevăr*, Bucureşti, 1967.
12. Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y., *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, 1958.
13. Frei G., *Calcule imperative*, în culegerea II (indicată mai jos).
14. Gentzen G., *Untersuchungen über das logische Schliessen*, I, II Mathem. Zeitschrift, B. 39.
15. Gluşkov V. M., *Sintez ţifrovîh avtomatov*, Moskva, 1962.
16. Hilbert D., W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1949.
17. Heyting A., *Les fondements des mathématiques*. Intuitionisme. Théorie de la demonstration. Paris, Louvain, 1955.

18. H e y t i n g A., *Intuitionism*, Amsterdam 1956 (Se citează după traducerea rusă, Moscova, 1965).
19. J a s k o w s k i S t., *On the rules of suppositions in formal logic*, „Studia Logica" 1, Varșovia, 1934.
20. J o r g e n s e n I., *A treatise of formal logic* (vol. I—III), Copenhagen, London, 1931.
21. K o l m o g o r o v A., *Zur Deutung der intuitionistischen Logic* (se citează după culegerea (I) de mai jos).
22. K l e e n e S. C., *Introduction to Metamatematics*, New York, Toronto, 1952.
23. L e w i s C. I., L a n g f o r d C. H., *Symbolic Logic*, New York, London, 1951.
24. L u k a s i e w i c z J a n, *Aristotele's Sillogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford, 1957.
25. M i h ă i l e s c u E., *Sisteme logice și forme normale in calculul propozițional bivalent*, București, 1966.
26. M o i s il G r. C., *Încercări vechi și noi de logică neclasică*, București, 1965.
27. M o i s i l G r. C., *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*, București, 1968.
28. N o v i k o v P. S., *Elemente de logică matematică*, (trad. rom.), București, 1966.
29. P r i o r A. N., *Formal Logic*, Oxford, 1962.
30. Q u i n e W. V. O., *Mathematical Logic*, Harvard, 1951.
31. R u s s e l l B., *Introduction à la philosophie mathématique*, Paris, 1928.
32. R o s s e r I. B., T u r q u e t t e A. R., *Many-valued logic*, Amsterdam, 1952.
33. S c h o l t z H., H a s e n j a e g e r G., *Grundzüge der Mathematischen Logik*, Berlin * Göttingen * Heidelberg, 1961.
34. T a r s k i A., *Introduction to logic and to methodology of deductive sciences*, New York, 1941 (Am folosit traducerea rusă, Moscova, 1948).
35. T î r n o v e a n u M., *Elemente de logică matematică*, București, 1965.
36. V o i ș v i l o E. K., *Poniatie*, Moskva, 1967.
37. [Z i n o v i e v A. A.], S i n o w i e w A. A., *Ueber meherwertige Logik*. Ein Abriß, Berlin, Basel, 1968 (traducere din limba rusă).
38. * * * (I) *Logică și filozofie* (culegere), București, Editura politică, 1966.
39. * * * (II) *Logica științei* (culegere), București, Editura politică, 1970.
40. * * * (III) *Contemporary Readings in Logical Theory*, New York, London, 1967.

Pentru unele probleme netratate în această carte a se vedea:

41. P e t r e B o t e z a t u, *Schiță a unei logici naturale*, București, 1969.

CUPRINSUL

VIII

LOGICA MODALĂ

IX